

Detekce ionizujícího záření

J. John

Doporučená literatura

LEHTO, J.: *Basics of Nuclear Physics and of Radiation Detection Measurement*, 2016, available (free) from NucWik at <http://nucwik.com/textbooks/index.html> in pdf and e-pub formats

KNOLL, G. F.: *Radiation Detection and Measurement*. J. Willey & Sons, New York, 2010

TAIT, W. H.: *Radiation Detection*. Butterworths 1980

GERNDT, J., PRŮŠA, P.: *Detektory ionizujícího záření*. ČVUT, 2011

BÄCHMANN, K.: *Messung radioaktiver Nuklide*. Verlag Chemia, 1970

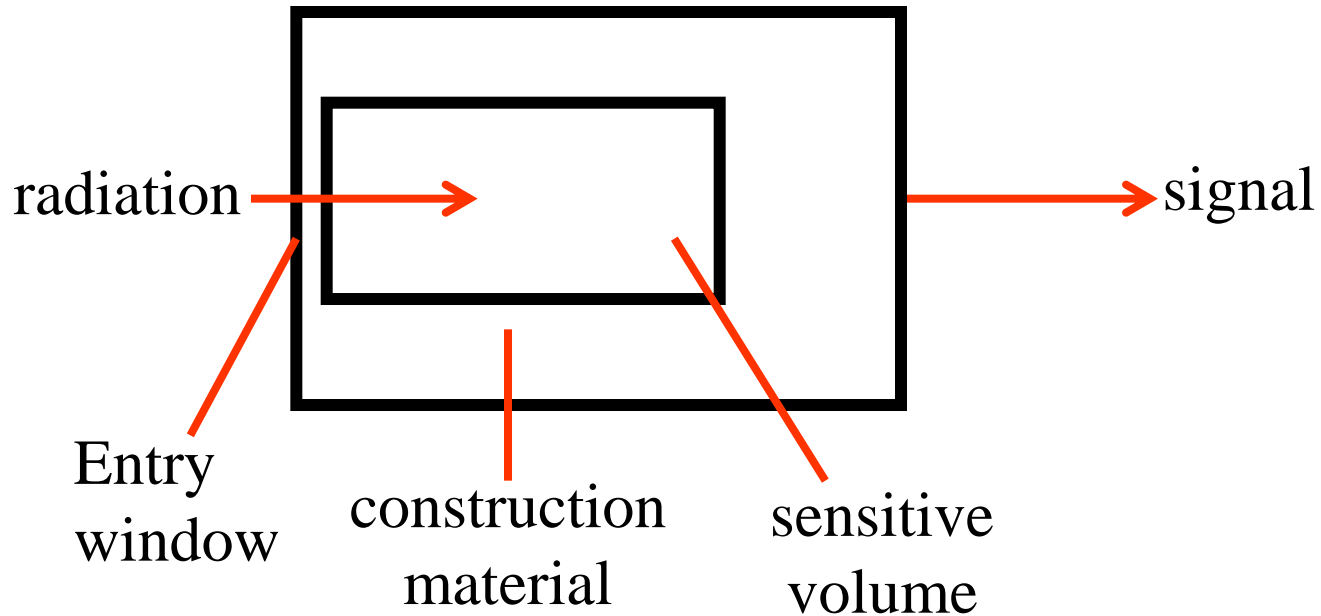
CROUTHAMEL, C. E.; ADAMS, F.; DAMS, R.: *Applied Gamma-Ray Spectrometry*. Pergamon Press, 1970

Prezentace na

http://www.jaderna-chemie.cz/data/documents/vyuka/john/DIZ_160222.pdf

Definitions

Generalised detector scheme



Not only radiation detectors – e.g. human eye, camera, CRT screen.....

Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing



Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing



Properties – Detection

Detection Efficiency

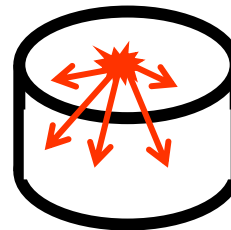
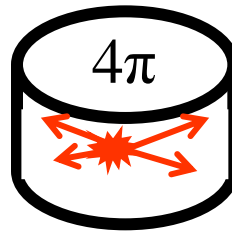
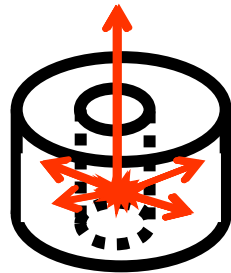
$$N = \eta \cdot Y \cdot A \cdot t$$

$$\eta = f_g \cdot f_a \cdot f_i \cdot f_{DT}$$

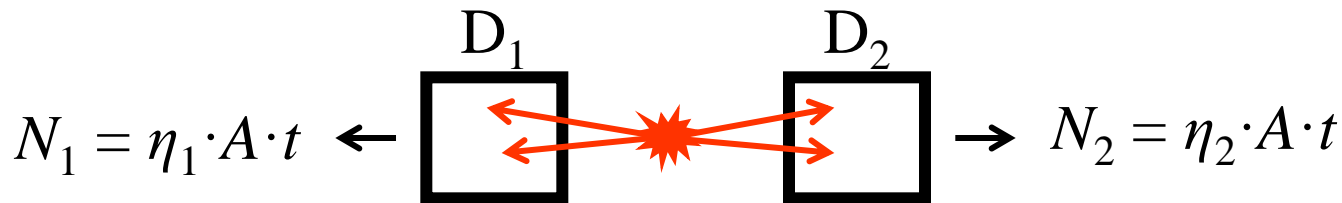
$$f_g = S/4\pi h^2$$

$$f_{DT} \approx 1 - n\tau$$

Geometry - f_g



Absolute activity determination



$$N_1 = \eta_1 \cdot A \cdot t$$

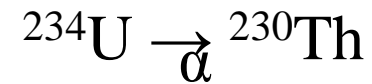
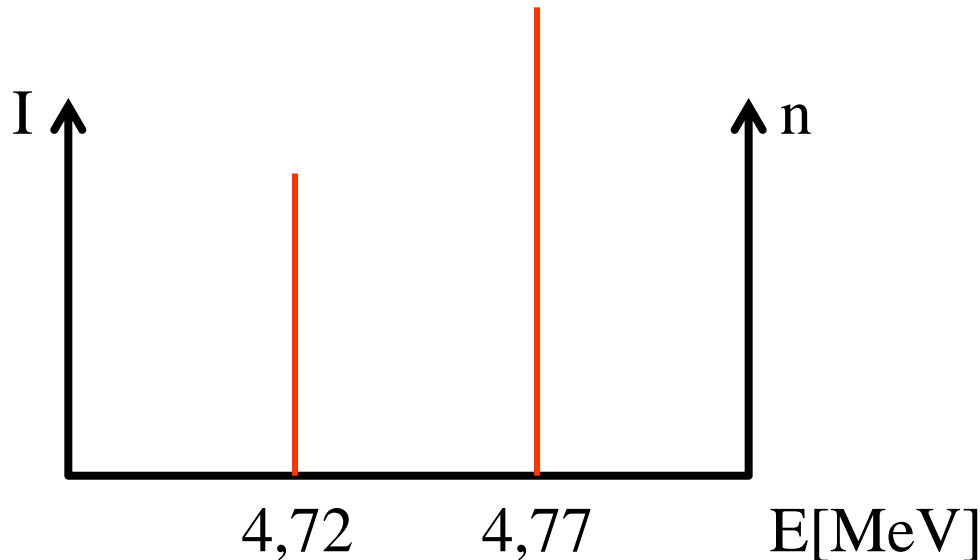
$$N_2 = \eta_2 \cdot A \cdot t$$

$$N_{12} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot A \cdot t \rightarrow A = \frac{N_1 \cdot N_2}{N_{12} \cdot t}$$

Properties – Energy measurement

Energy resolution

$\Delta E/E$ (%)



Emission spectrum

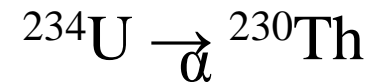
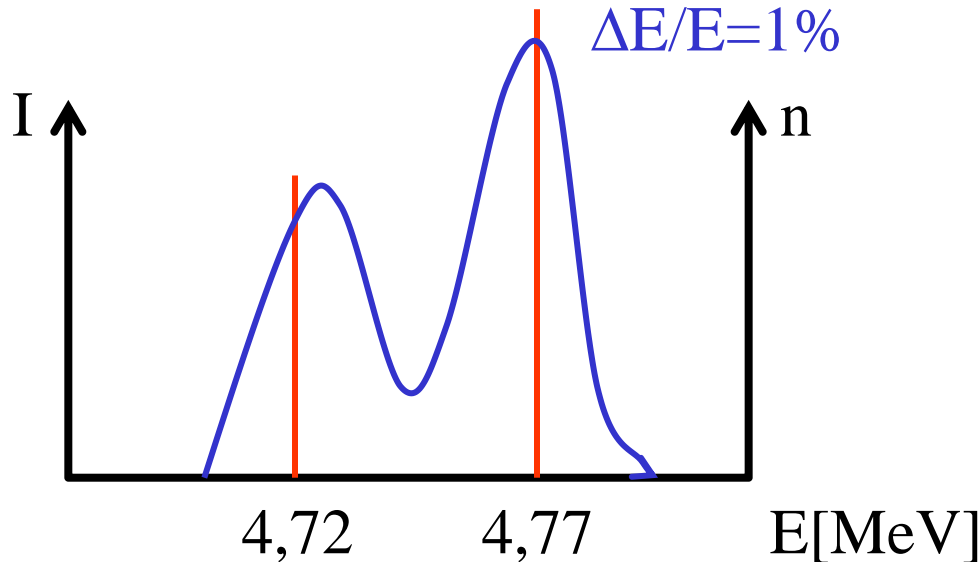
Absorption spectrometry / Pulse Height Analysis

- At least some particles loose all energy
- Output signal proportional to the energy deposited

Properties – Energy measurement

Energy resolution

$\Delta E/E$ (%)



Experimental spectrum

- semiconductor

Emission spectrum

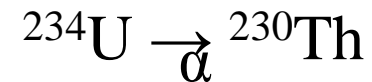
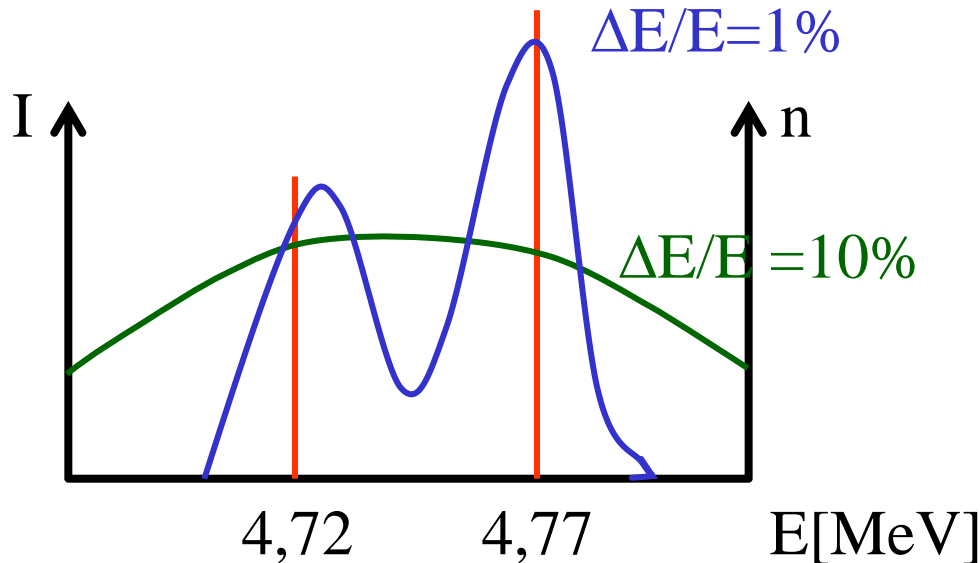
Absorption spectrometry / Pulse Height Analysis

- At least some particles loose all energy
- Output signal proportional to the energy deposited

Properties – Energy measurement

Energy resolution

$\Delta E/E$ (%)



Experimental spectrum

- scintillator

Experimental spectrum

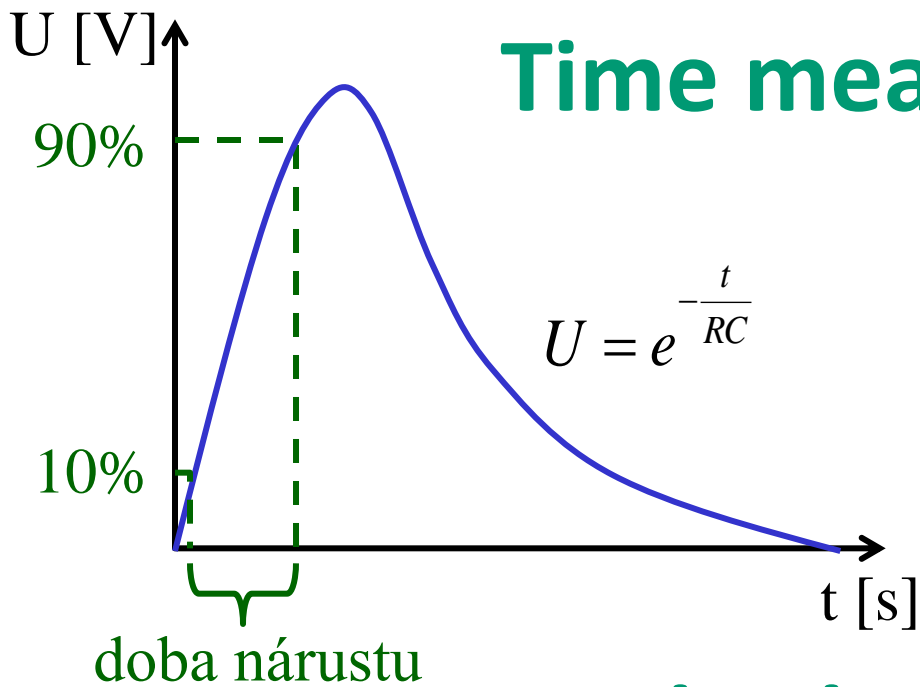
- semiconductor

Emission spectrum

Absorption spectrometry / Pulse Height Analysis

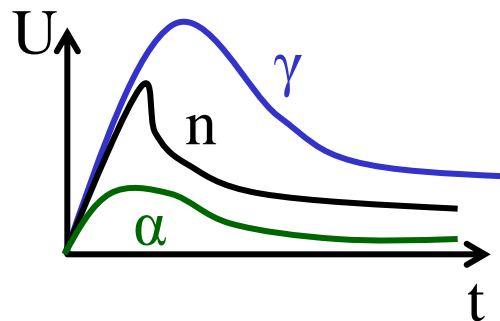
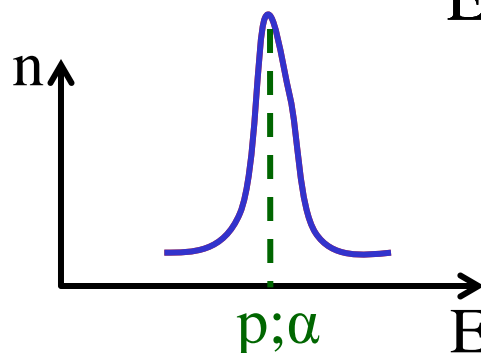
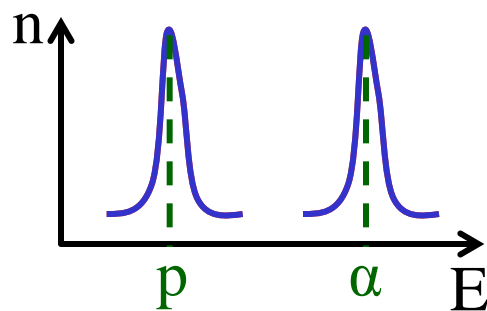
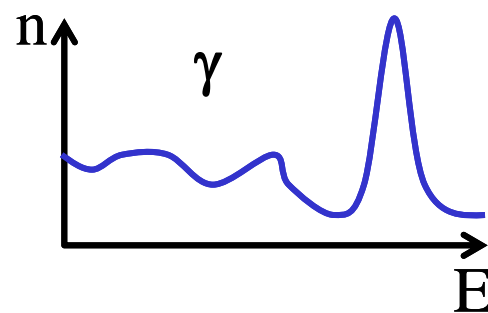
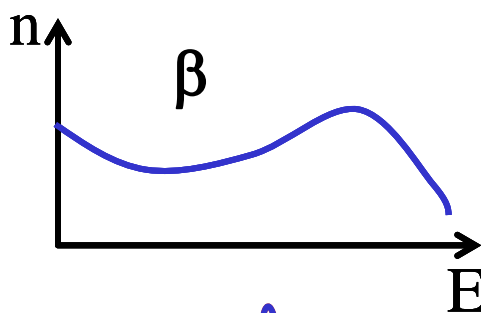
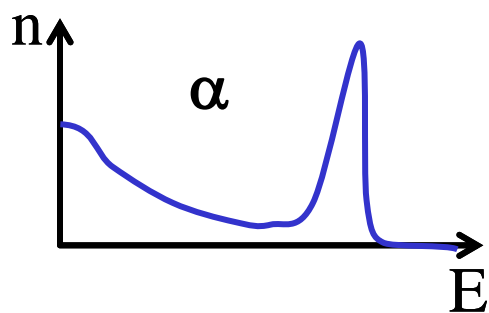
- At least some particles loose all energy
- Output signal proportional to the energy deposited

Time measurement



$$N_{NK} = 2N^2\tau_r$$

Discrimination



Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

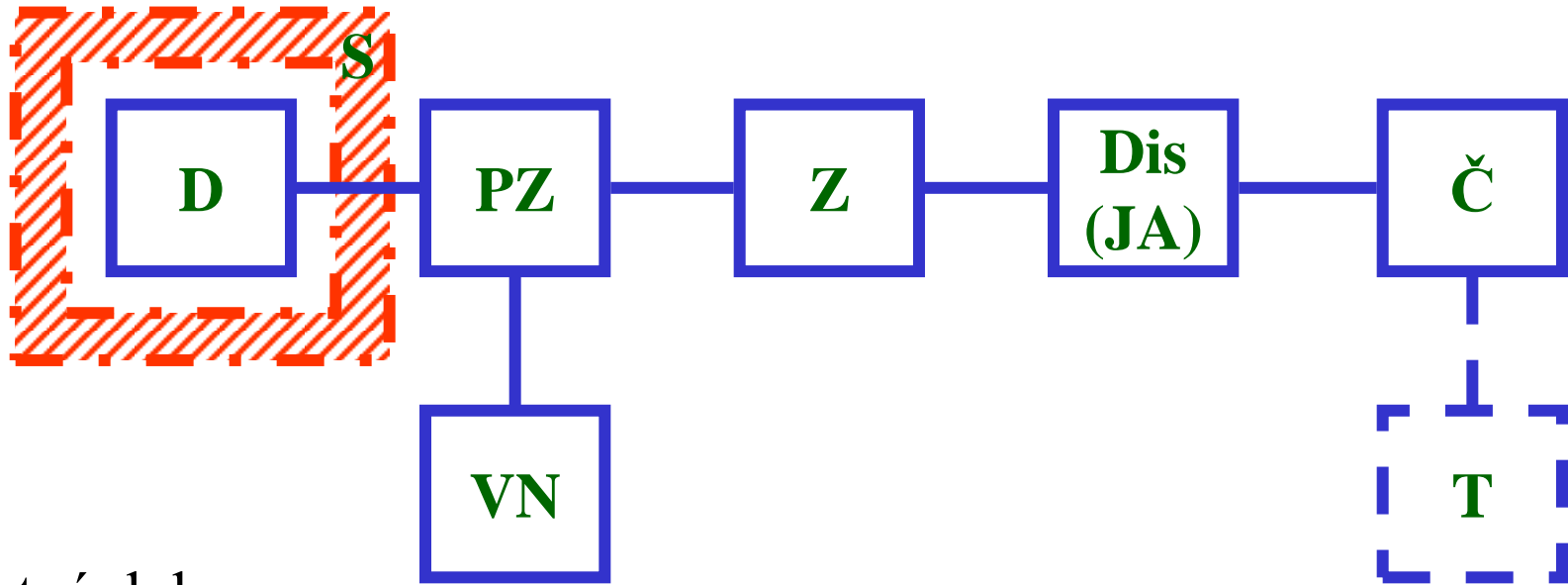
Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing



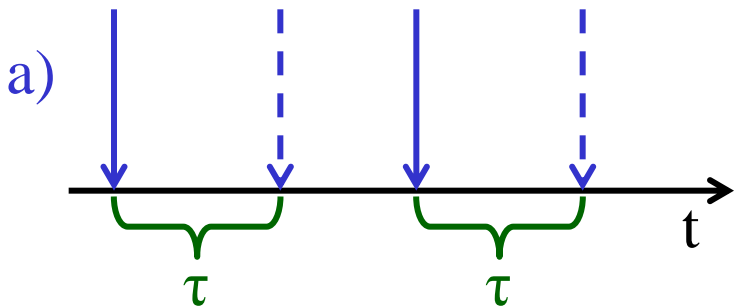
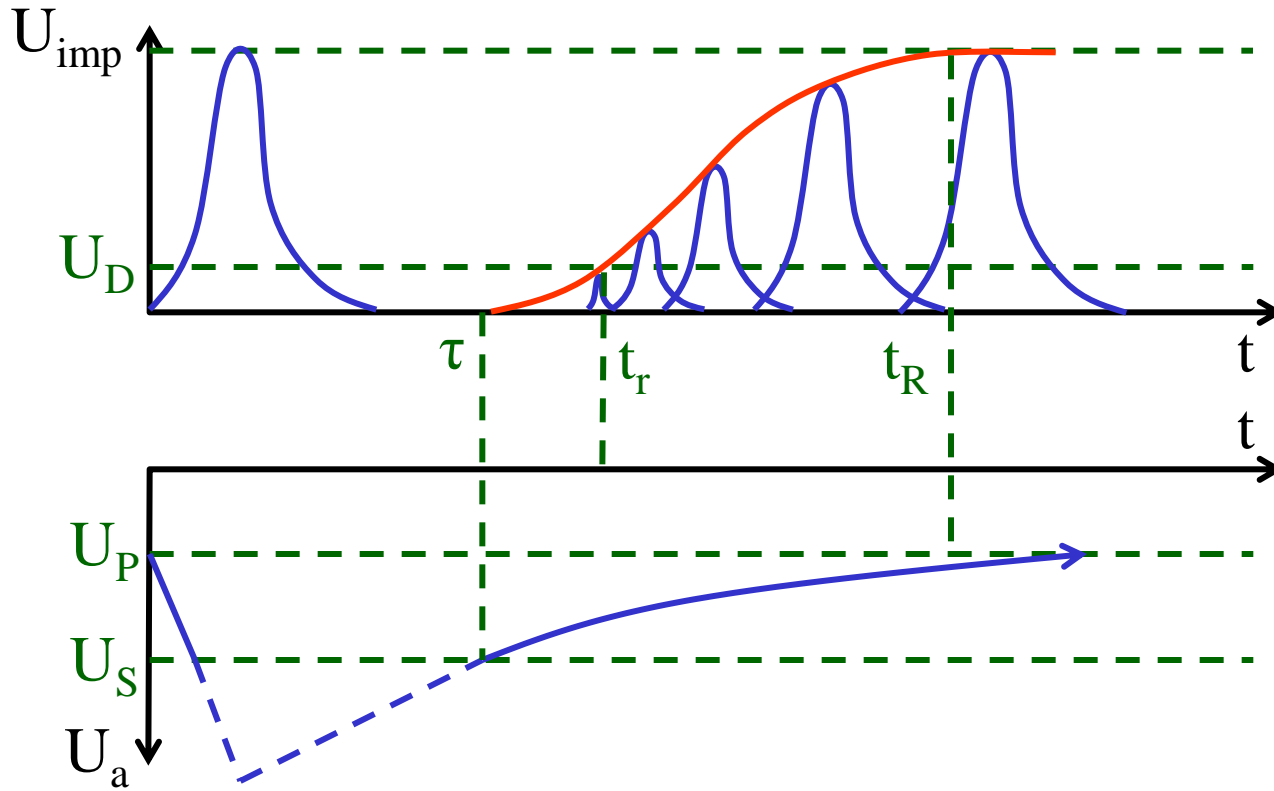
Functions – Counting



Mrtvá doba:

detektor	τ [μsec]	$n \cdot \tau$ [%]	
		$n = 10^2 \text{ sec}^{-1}$	$n = 10^3 \text{ sec}^{-1}$
GM (X_2)	~ 80	0,8	8
GM (EtOH)	~ 400	4	40
Proporcionální	~ 1	0,01	0,1
NaI(Tl)	~ 1	0,01	0,1

Functions – Dead time

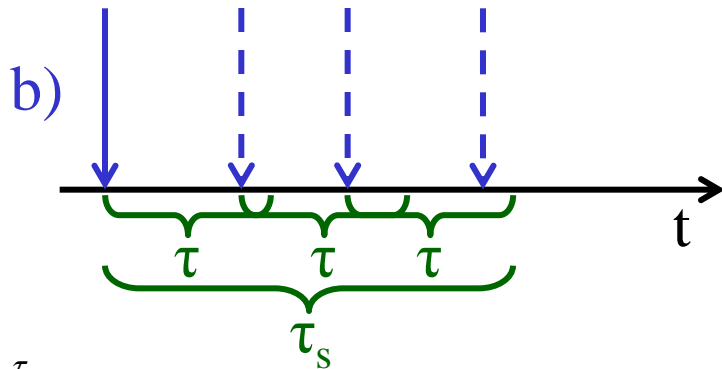


$$n - n' = nn' \tau$$

$$n = \frac{n'}{1 - n' \tau}$$

$$\left(\frac{n - n'}{n} = n' \tau \right)$$

Dead time



$$t \quad \text{imp} \quad P = \exp(-nt)$$

$$dt \quad \text{imp} \quad P = n \, dt$$

$$\Sigma \quad P = n \exp(-nt) \, dt$$

$$\int_0^{\tau} P = \text{relativní počet „ztracených“ impulzů}$$

$$n \int_0^{\tau} \exp(-nt) \, dt = 1 - \exp(-n\tau) \quad \left(\frac{n - n'}{n} \right)$$

$$\frac{n - n'}{n} = 1 - \exp(-n\tau)$$

$$n' = n \exp(-n\tau)$$

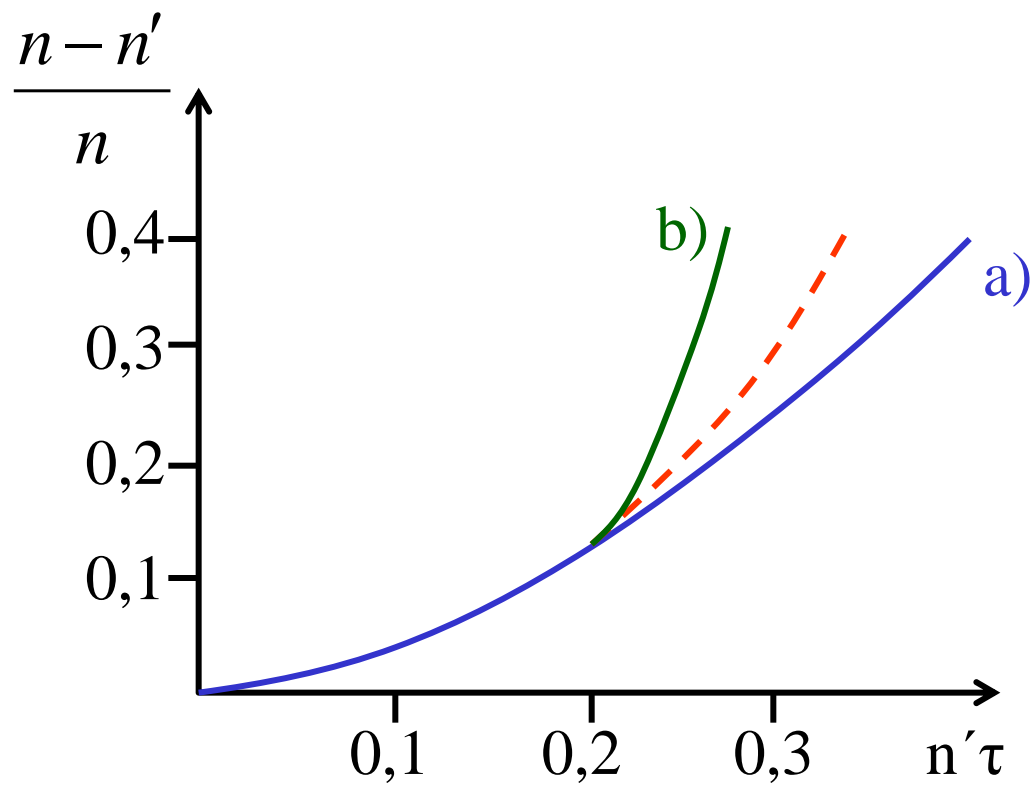
$$n = n' \exp(n\tau)$$

$$n\tau \ll 1$$

$$\exp(nt) = 1 + n\tau \dots$$

$$\begin{pmatrix} n = n' + nn' \tau \\ n - n' = nn' \tau \end{pmatrix}$$

Mrtvá doba 3



Mrtvá doba 4

Měření τ :

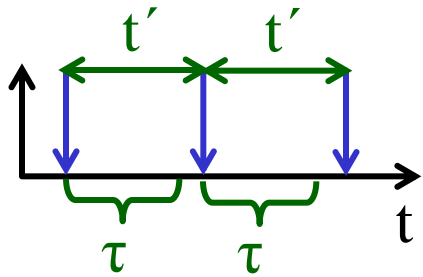
1) 2 zdroje $n_1 = \frac{n'_1}{1 - n'_1\tau}$ $n_2 = \frac{n'_2}{1 - n'_2\tau}$

$$n_{12} = \frac{n'_{12}}{1 - n'_{12}\tau} \quad n_1 + n_2 = n_{12}$$

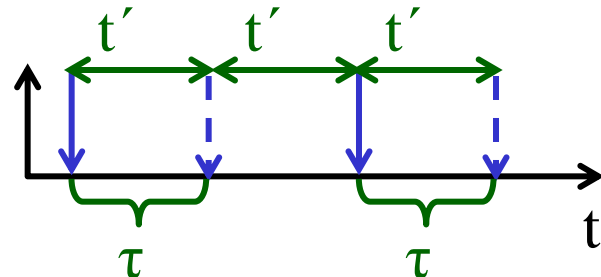
$$\frac{n'_1}{1 - n'_1\tau} + \frac{n'_2}{1 - n'_2\tau} = n_{12} = \frac{n'_{12}}{1 - n'_{12}\tau} \quad / \text{úprava zanedbat } \tau^2$$

$$\tau = \frac{n'_1 + n'_2 - n'_{12}}{2n'_1n'_2}$$

2) Pulzní záření Mrtvá doba 5

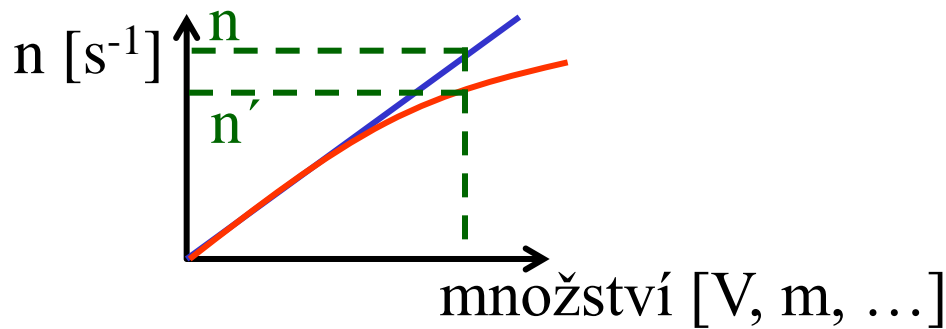


$t' > \tau$ $n = n_0$

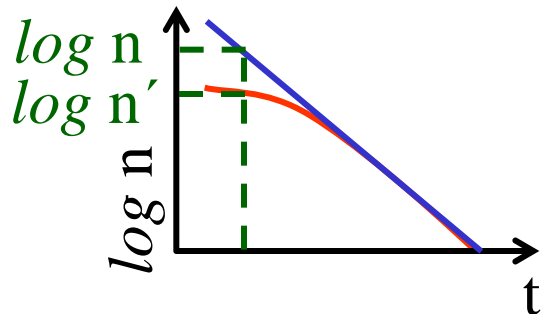


$t' = \tau$ $n = n_0/2$

3) Standardní přídavky



4) Rozpad



$T_{1/2} \approx 1$ hod

$T_{1/2}({}^{128}\text{I}) = 25'$

$T_{1/2}({}^{56}\text{Mn}) = 2,6$ hod

Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

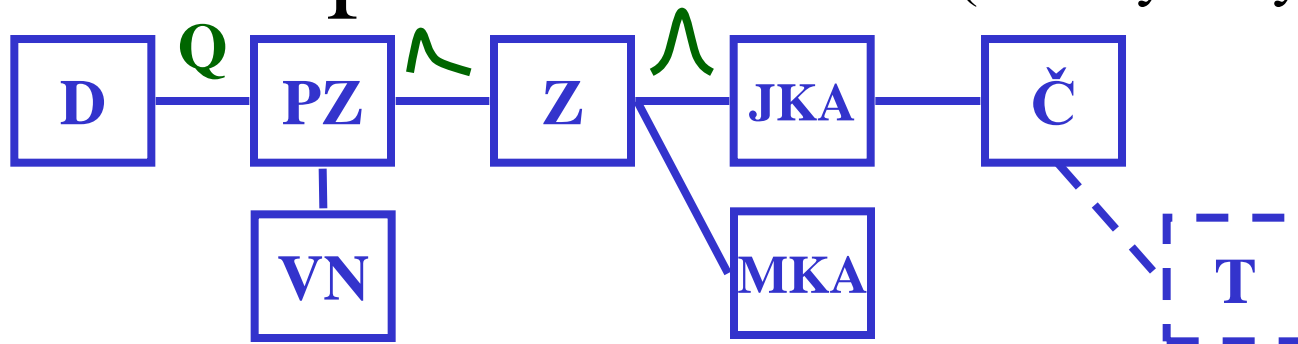
Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

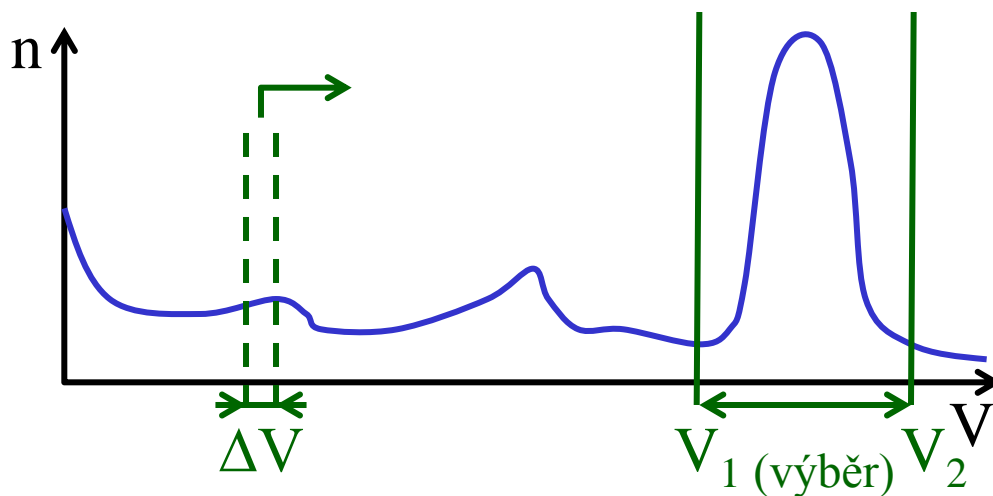
Oblasti použití Functions

Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing

Spektrometrie (= analýza výšky pulzu)

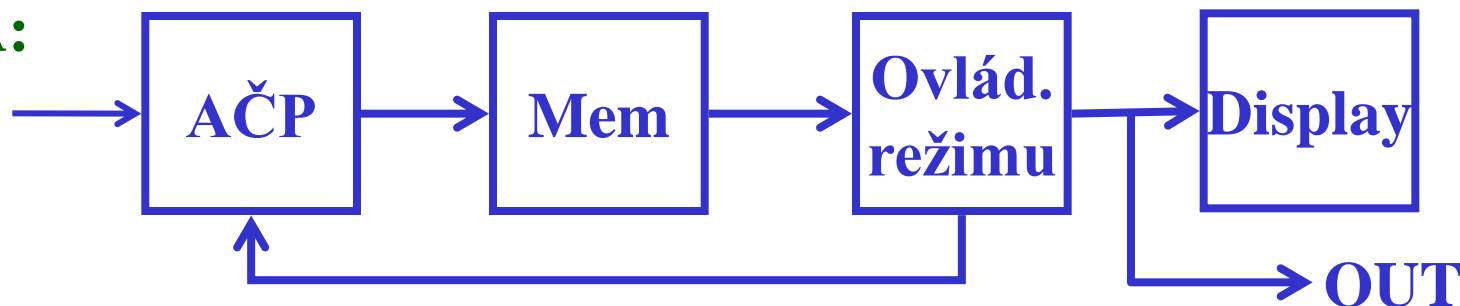


JKA:

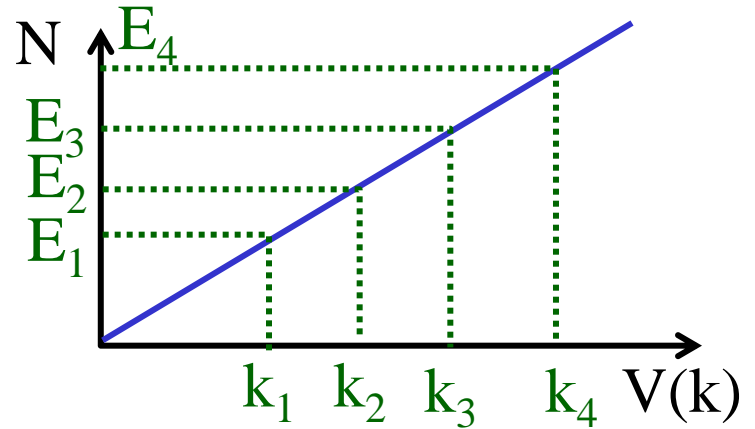
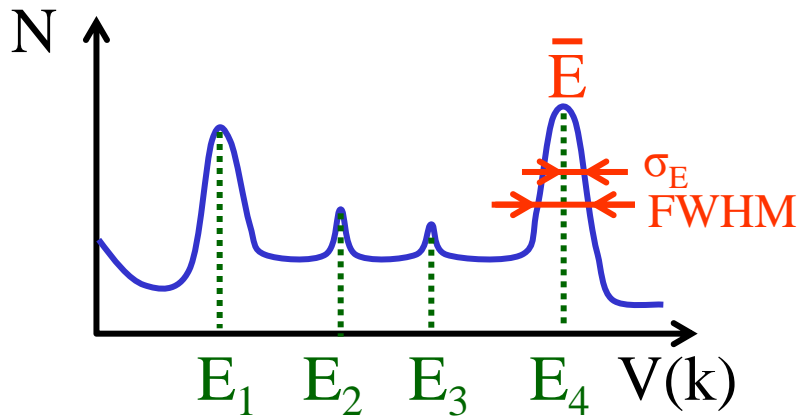


MCA
simulation

MKA:



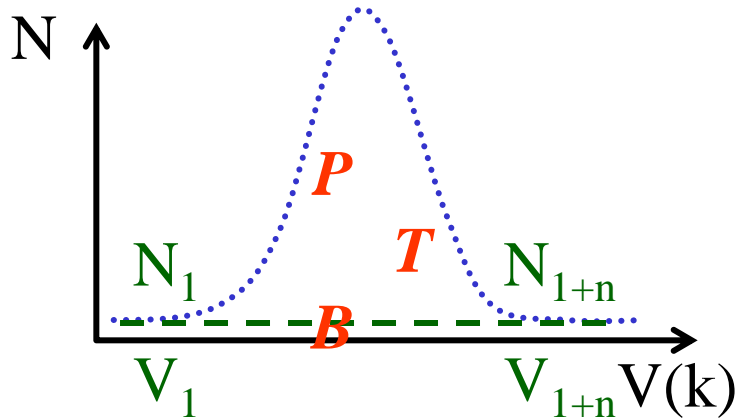
Spektrometrie 2



$$\mathbf{E} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{k})$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{\bar{E} \cdot \epsilon}{N}}$$

$$\text{FWHM} = 2,35 \sigma_E$$



$$T = \sum_{i=V_1}^{V_{1+n}} N_i$$

$$B = \frac{N_{V_1} + N_{V_{1+n}}}{2} \cdot n$$

$$P = T - B$$

$$\sigma_P = \sqrt{T + (n/2)^2 (N_{V_1} + N_{V_{1+n}})}$$

Spektrometrie 3

Měření aktivity

a) Relativně $A_X = A_S \cdot \frac{P_X}{P_S}$

b) Kalibrace

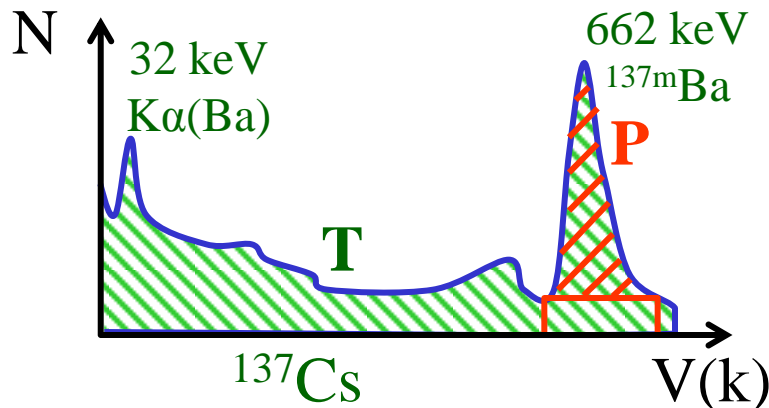
$$\eta = f(E, G)$$

$$A = \frac{P/t_m}{\eta \cdot Y}$$

$$\eta_i = \frac{P_i/t_m}{A_i \cdot Y_i}$$

c) Výpočet

$$A = \frac{P/t_m}{R_E \cdot \Omega \cdot \varepsilon_E \cdot Y \cdot K} \quad K = \frac{1}{1 + \alpha}; \quad \alpha = \frac{\bar{e}}{\gamma}$$



$$R_E = \frac{P}{T}$$

Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

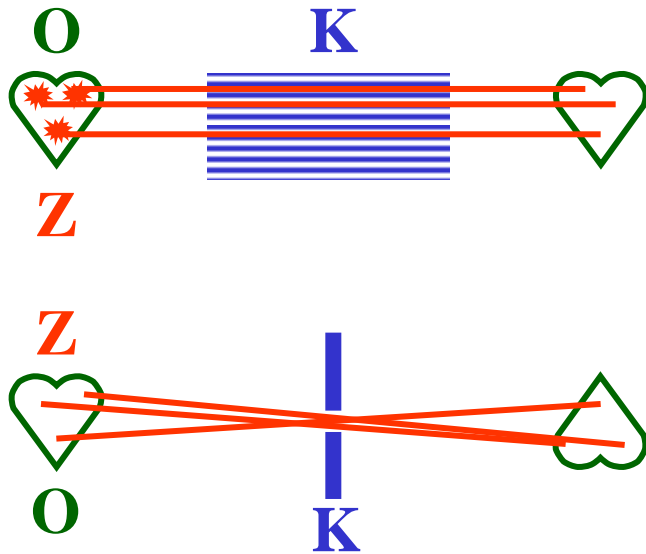
Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing

Zobrazování

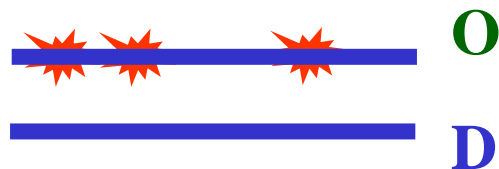
Objekt aktivní

Objekt neaktivní

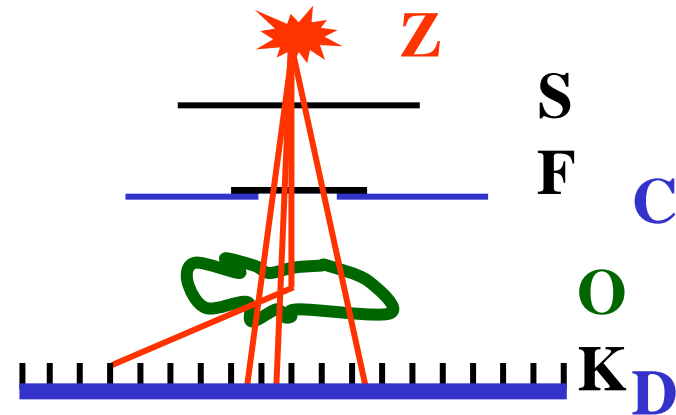
Zobrazovací systémy



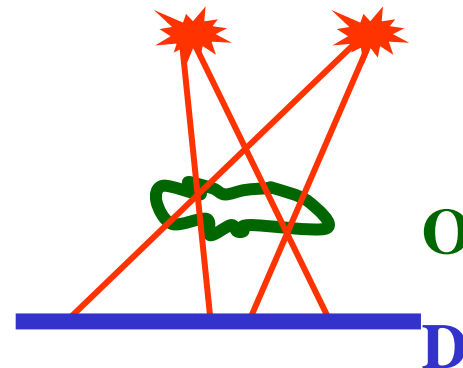
Autoradiografie



Radiografie

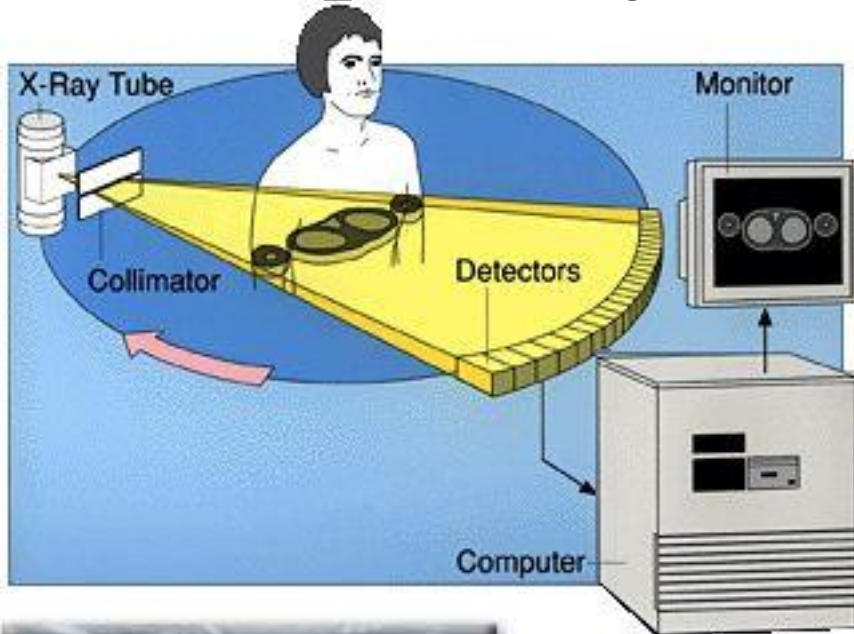


Stereoradiografie



CT přístroj

https://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&v=gaiCtdo6CLE



Vnější pohled na moderní CT přístroj, pohyblivý stůl a otvor v gantry.



Pohled dovnitř gantry. Ve vrchní části rentgenka, naproti ní obloukovitý detektor.



První generace – rotačně–translačního pohyb rentgenky a jediného detektoru; Doba výstavby jediného skenu trvala několik minut.

Druhá generace – rovněž rotačně–translačního skenování, doba výstavby obrazu 10-20 sekund při použití 10-50 detektorů.

Třetí generace – 300-600 detektorů, čistě rotační pohyb.

Čtvrtá generace – detektory tvoří úplnou kružnici okolo objektu (až tisíc detektorů), otáčí se pouze rentgenka.

Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

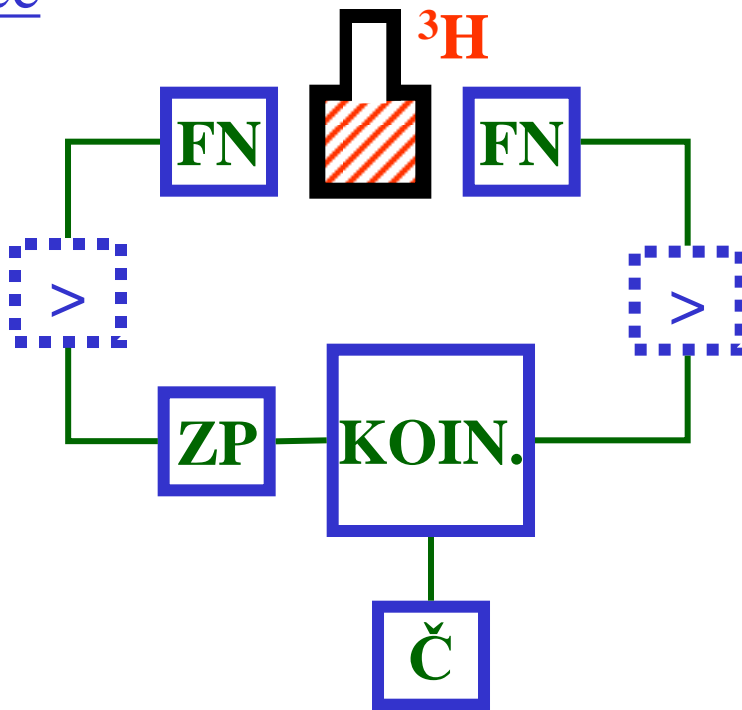
Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

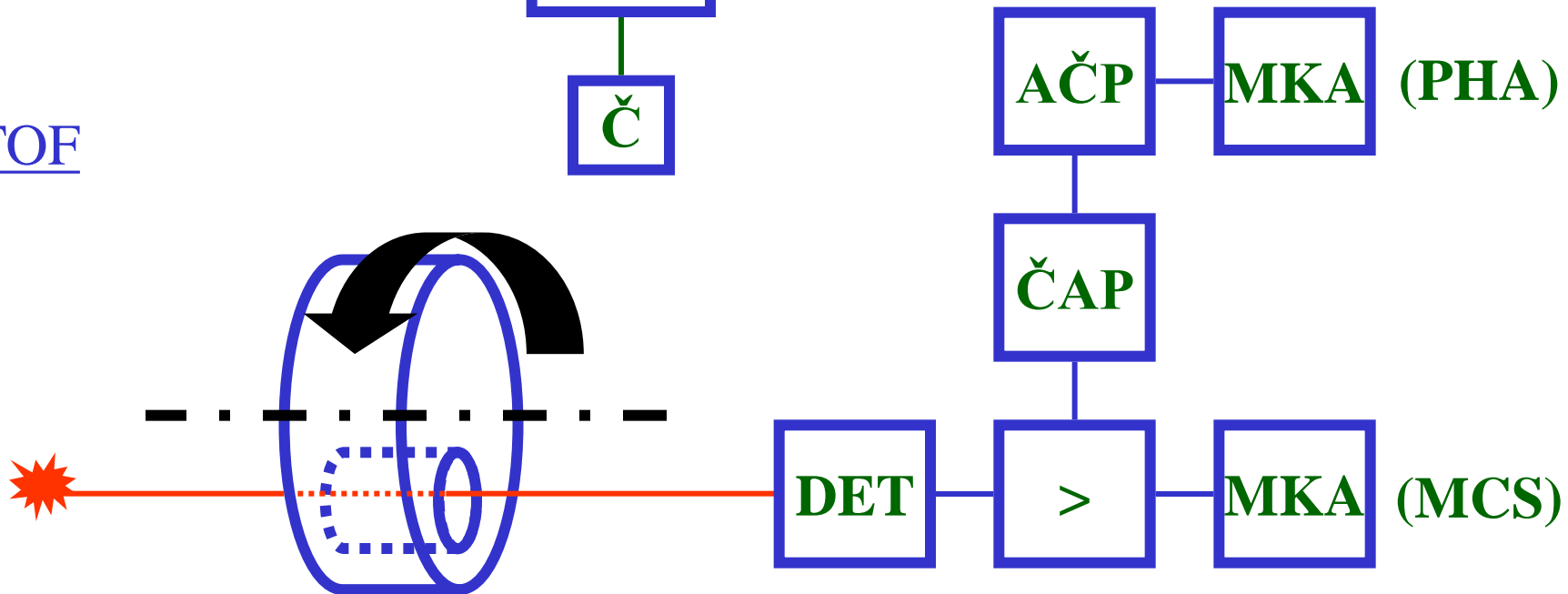
Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing

Čas

Koincidence



TOF



Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

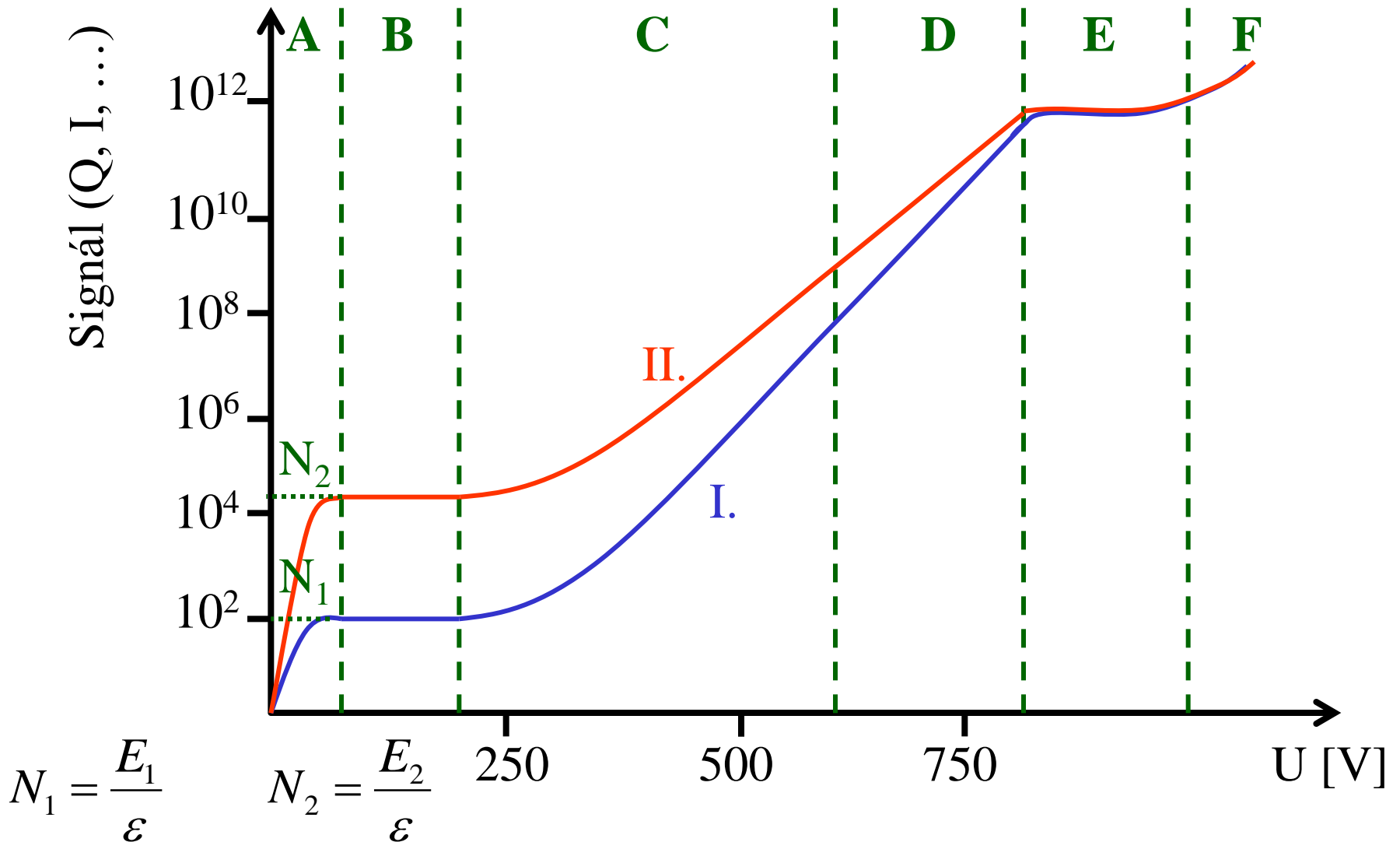
Oblasti použití Functions

Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing

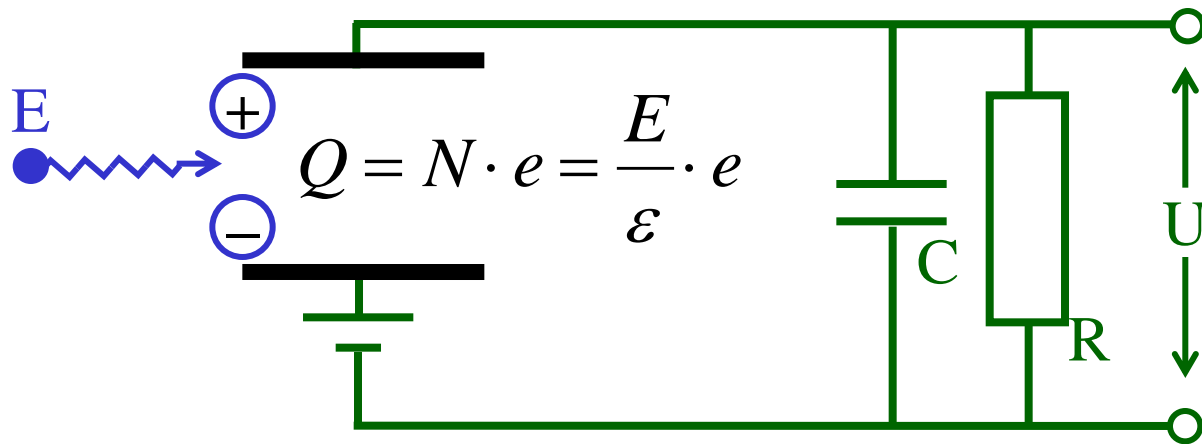


Plynové detektory

PRACOVNÍ CHARAKTERISTIKA



Ionizační komory

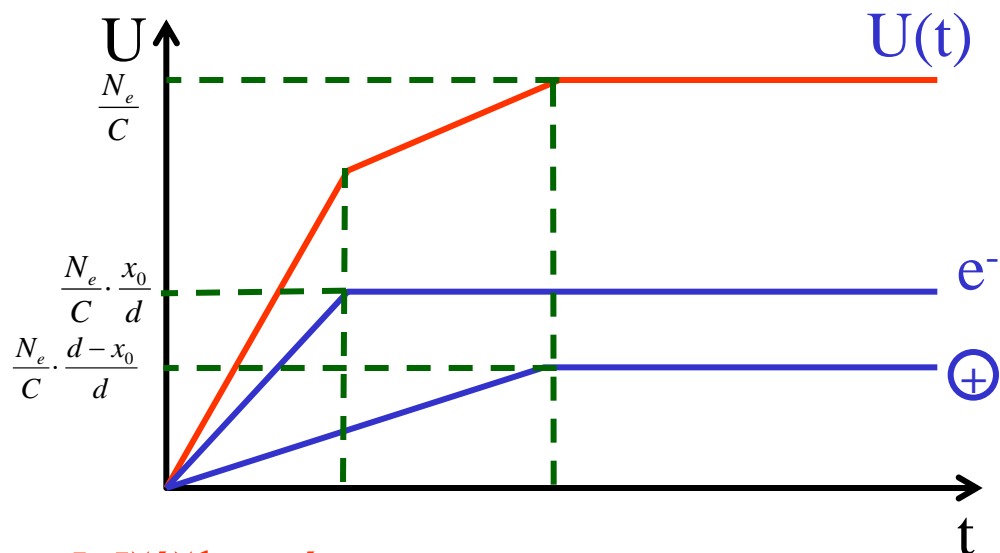


Proudové: $R \cdot C \gg t_s$; $R \cdot C \gg 1/n$

Impulzní: $R \cdot C \approx t_s$; $R \cdot C \ll 1/n$

Ionizační komory 2

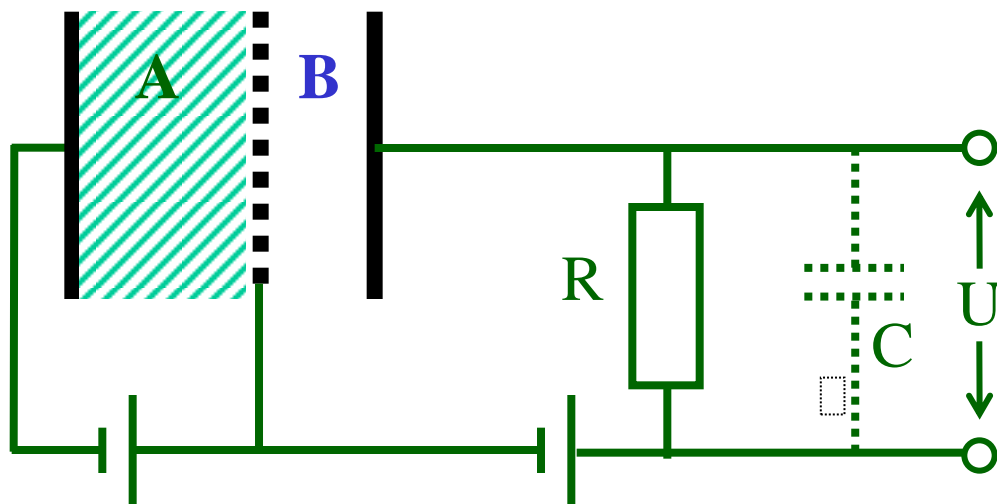
Desková



d – vzdálenost desek
 x_0 – vzdálenost interakce
 od desky

$E = \text{konst.}$

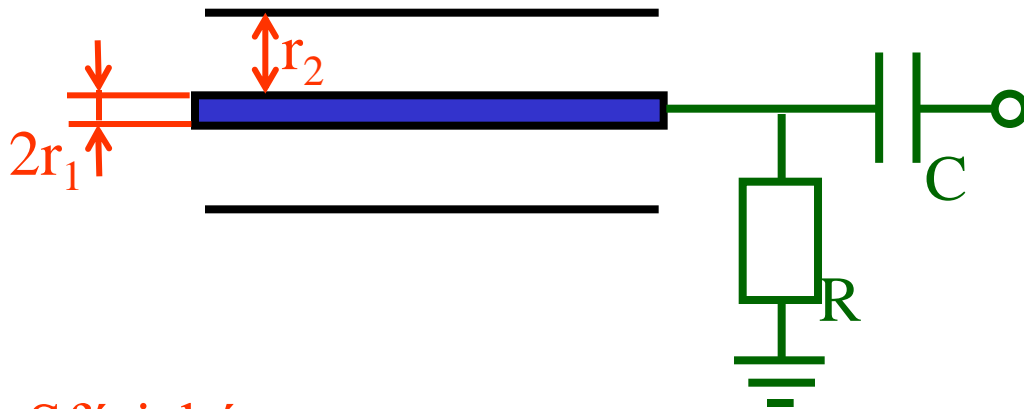
Mřížková



$\Delta E/E < 1\%$ ($E_\alpha = 5 \text{ MeV}$)

Ionizační komory 3

Válcová

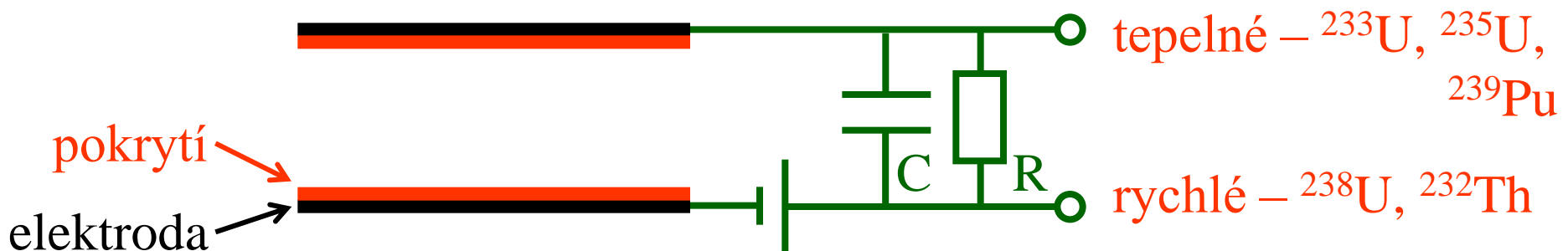


$$E(r) = \frac{U}{r \cdot \log \frac{r_2}{r_1}}$$

Sférická

$$E(r) = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \cdot \frac{U}{r^2} \quad \frac{\Delta E}{E} \approx n \cdot 10^{-1} \%$$

Štěpná



Proporcionální detektory

Plynové zesílení

α – součinitel nárazové ionizace (počet srážek e^- na 1 cm)

m – součinitel plynového zesílení nárazovou ionizací

$$m = \frac{N(l)}{N_0} = e^{\alpha \cdot l}$$

1 – délka laviny

↳ (deskový detektor $\rightarrow m = f(x_0)$)

M – celkový součinitel plynového zesílení

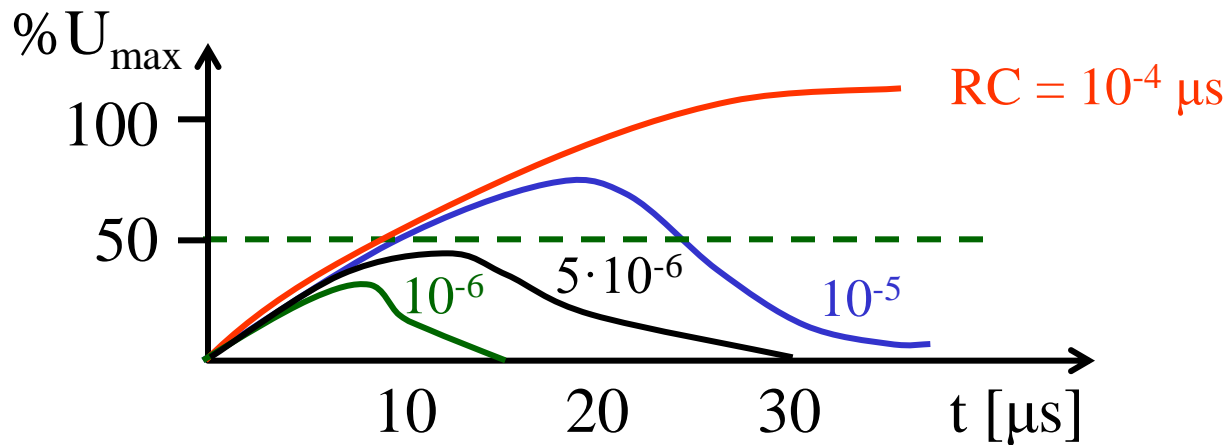
$$M = m + pm^2 + p^2m^3 + \dots \quad (pm < 1)$$

$$M = \frac{m}{1 - pm}$$

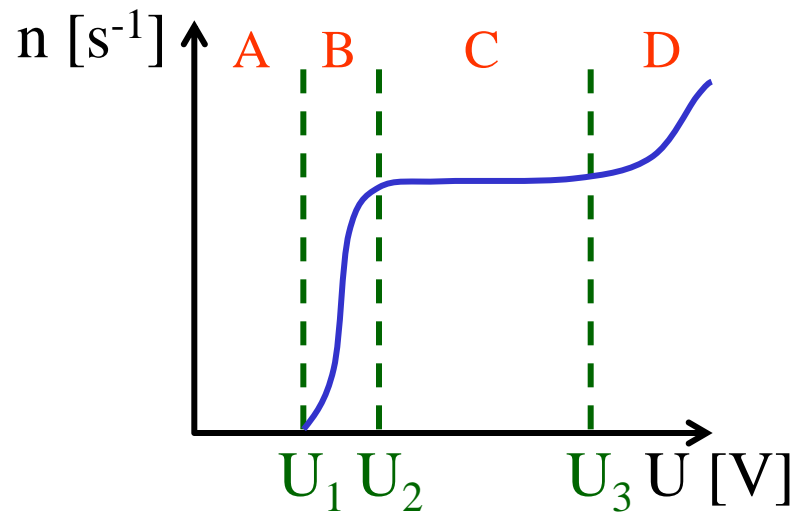
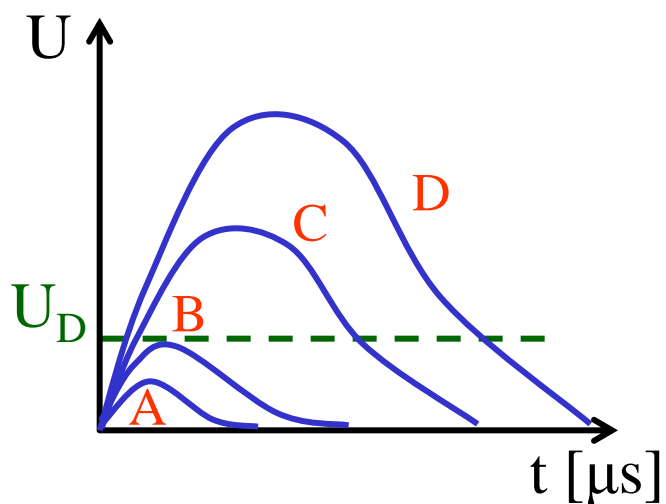
$pm \ll 1 \implies M = m$
 $pm \rightarrow 1 \implies M \rightarrow \infty$

Proporcionální detektory 2

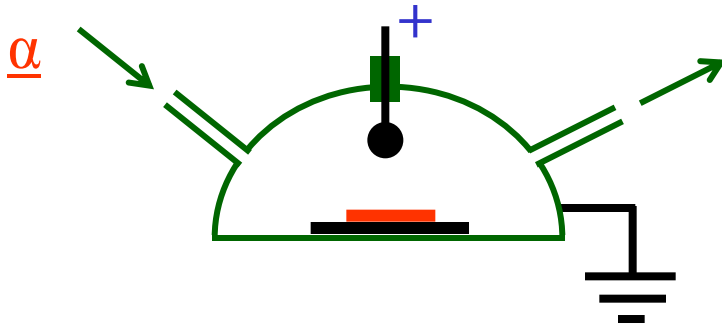
Signál



Charakteristika

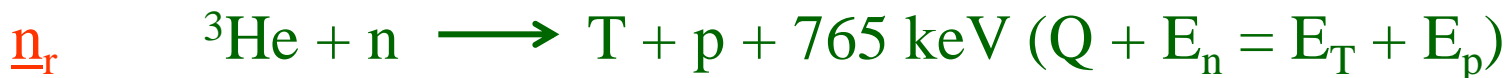
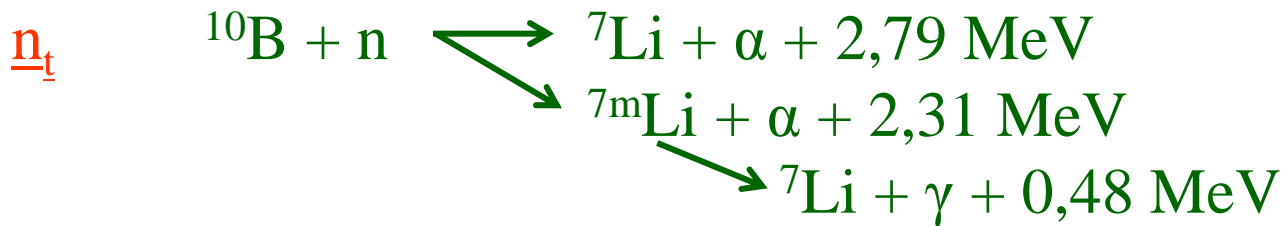


Proporcionální detektory 3



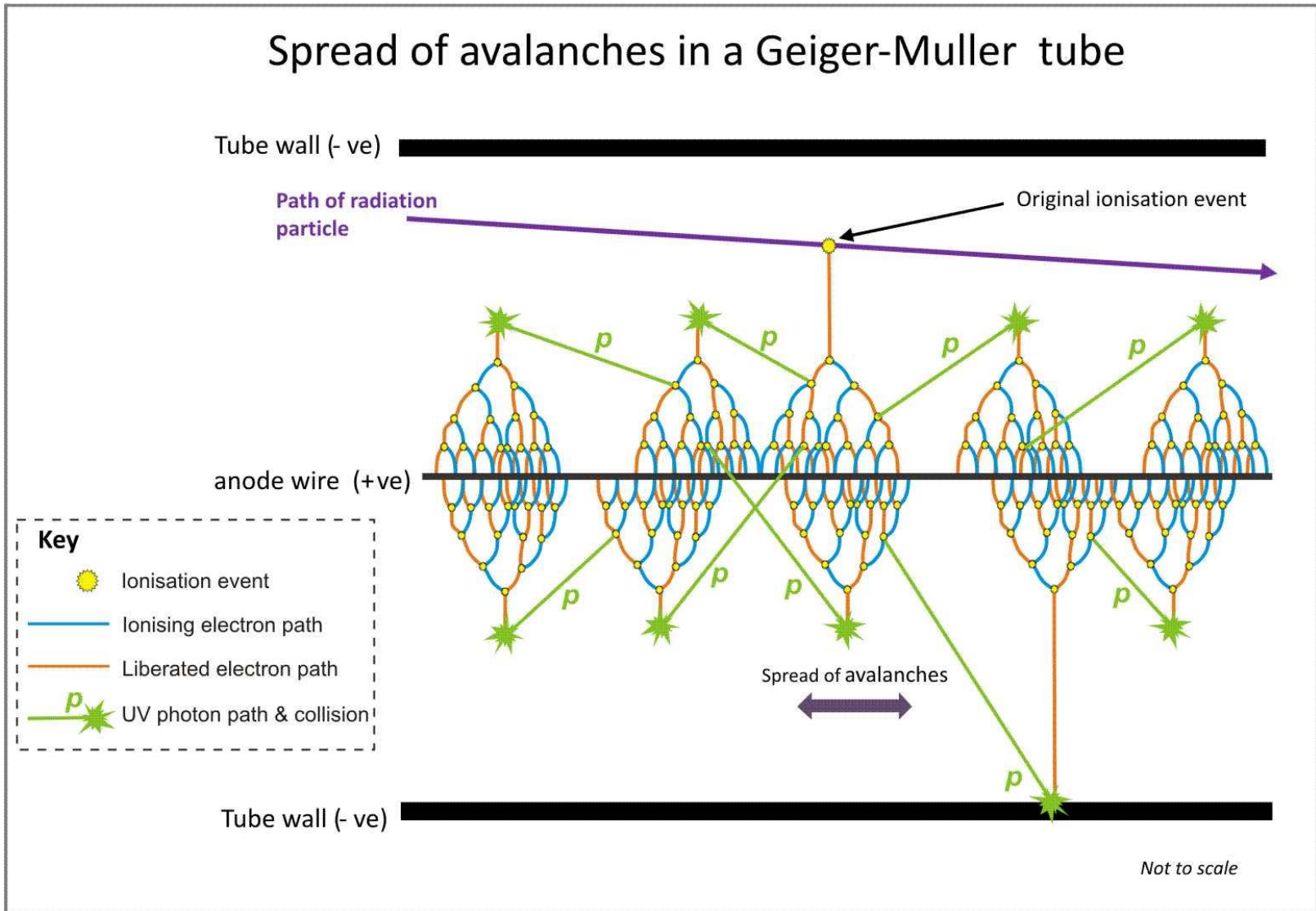
X $250 \text{ eV} < E < 100 \text{ keV}$ $(1 \text{ mm} < R < 3 \text{ cm})$

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{0,15}{\sqrt{E}} \quad E [\text{keV}]$$



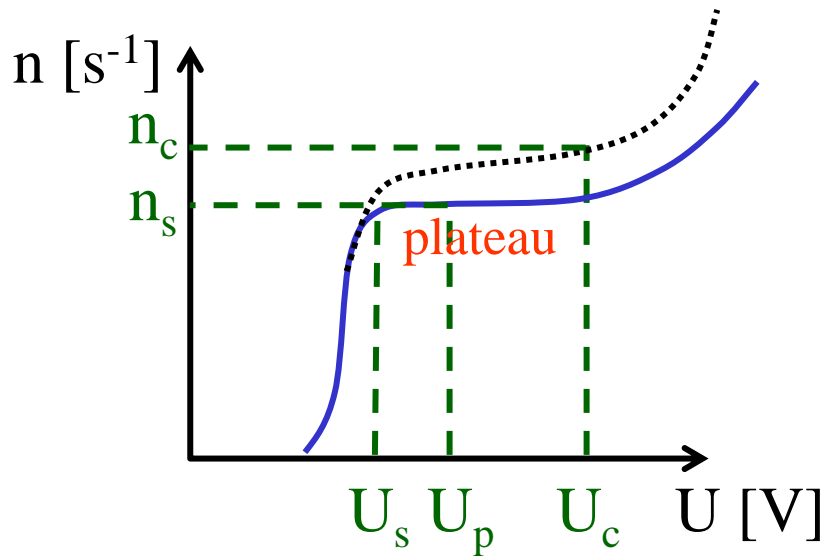
„G-M“ detektory

Spread of avalanches in a Geiger-Muller tube



„G-M“ detektory

Charakteristika

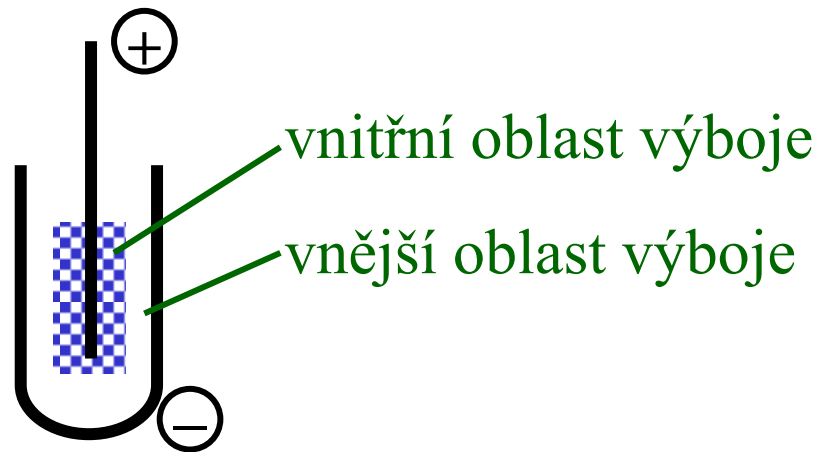


$$\text{Strmost} = \frac{n_c - n_s}{U_c - U_s}$$

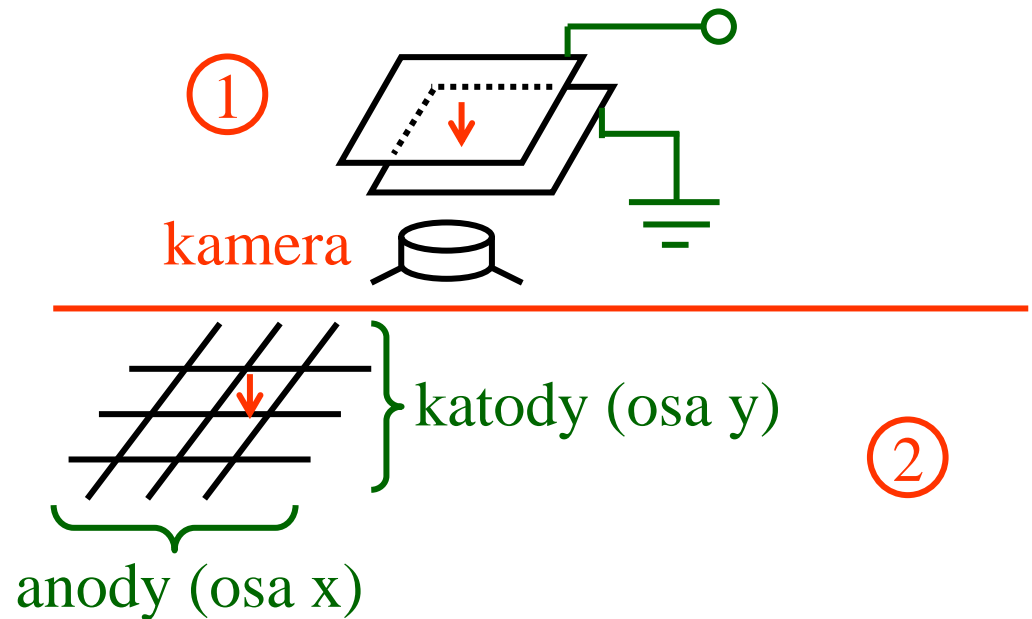
$$\text{Strmost}' = \frac{n_c - n_s}{n_s} \cdot \frac{10^4}{U_c - U_s} [\% / 100 \text{ V}]$$

(Ar – 10% EtOH \approx 0,02 %)

Koronové detektory



Jiskrové detektory



Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing




Scintilační detektory

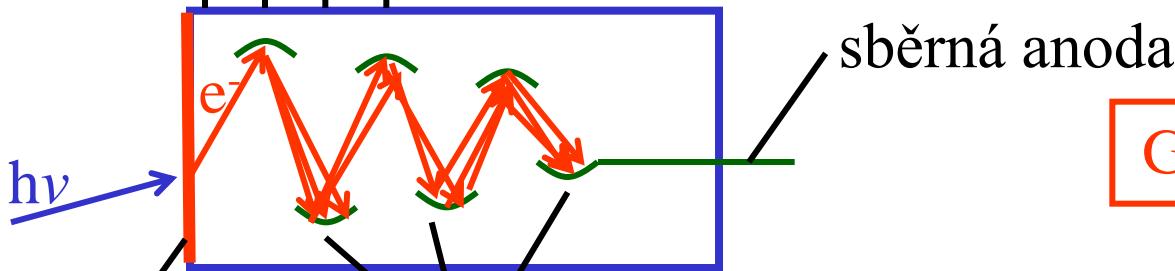
SD ↙ scintilátor
 ↘ světlovodič
 ↘ fotonásobič

Okénka: 0,025 mm ($6,7 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-2}$) Al
 0,2 mm ($37 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-2}$) Be

– do 10 keV
 – do 3 keV

FWHM: $\frac{\Delta E}{E} = \frac{2,35\sqrt{\bar{w}}}{\sqrt{E}}$ $\bar{w} = \frac{\bar{\varepsilon}}{f}$

FN:  ~ 100V

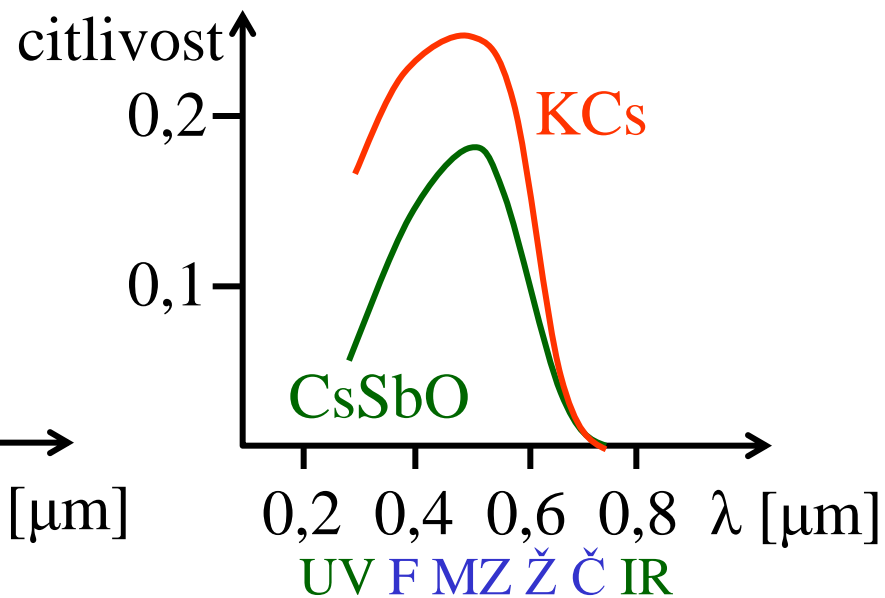
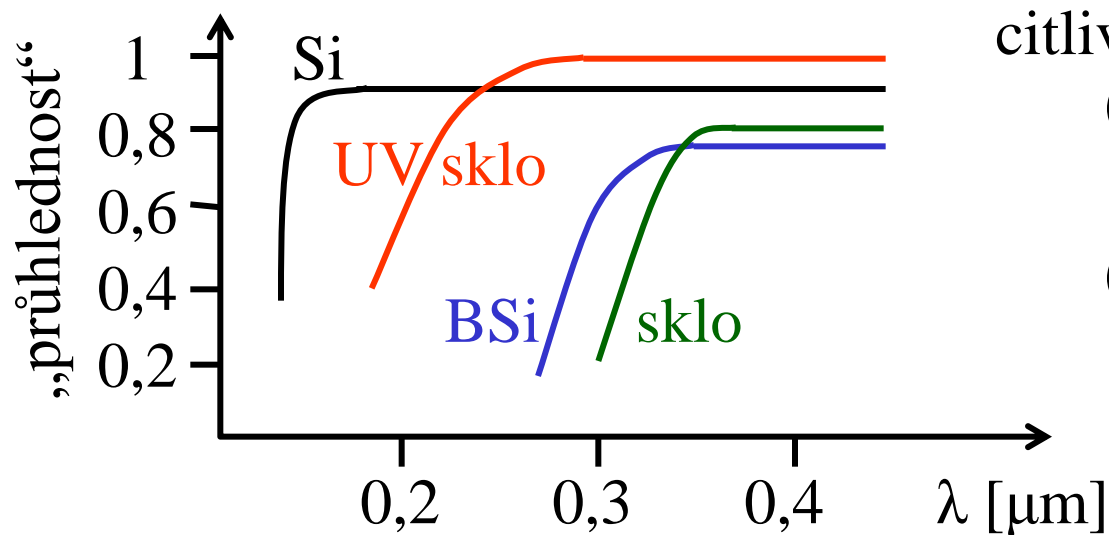


$G = p^n$ p – zisk
 n – počet

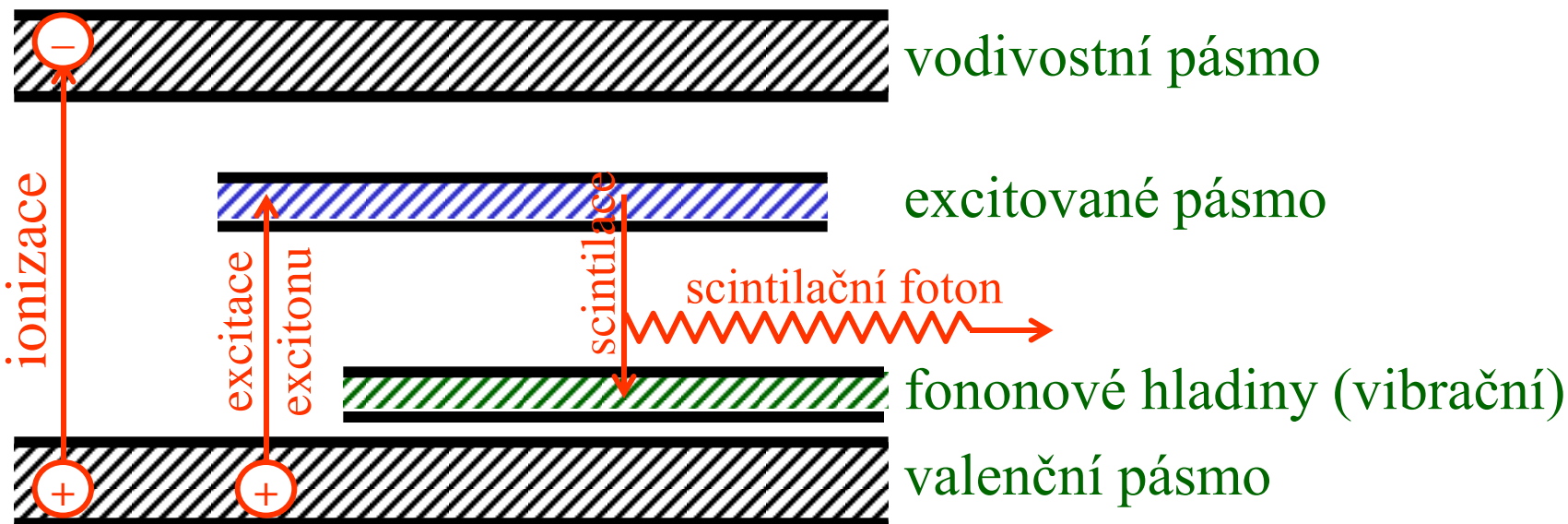
Př: $p \approx 5$ $n \approx 8-14$
 $\rightarrow G \approx 10^6-10^9$

fotokatoda (-) dynody
 CsSbO; KCs... Cs-Sb; Ag-Mg

Scintilační detektory 2



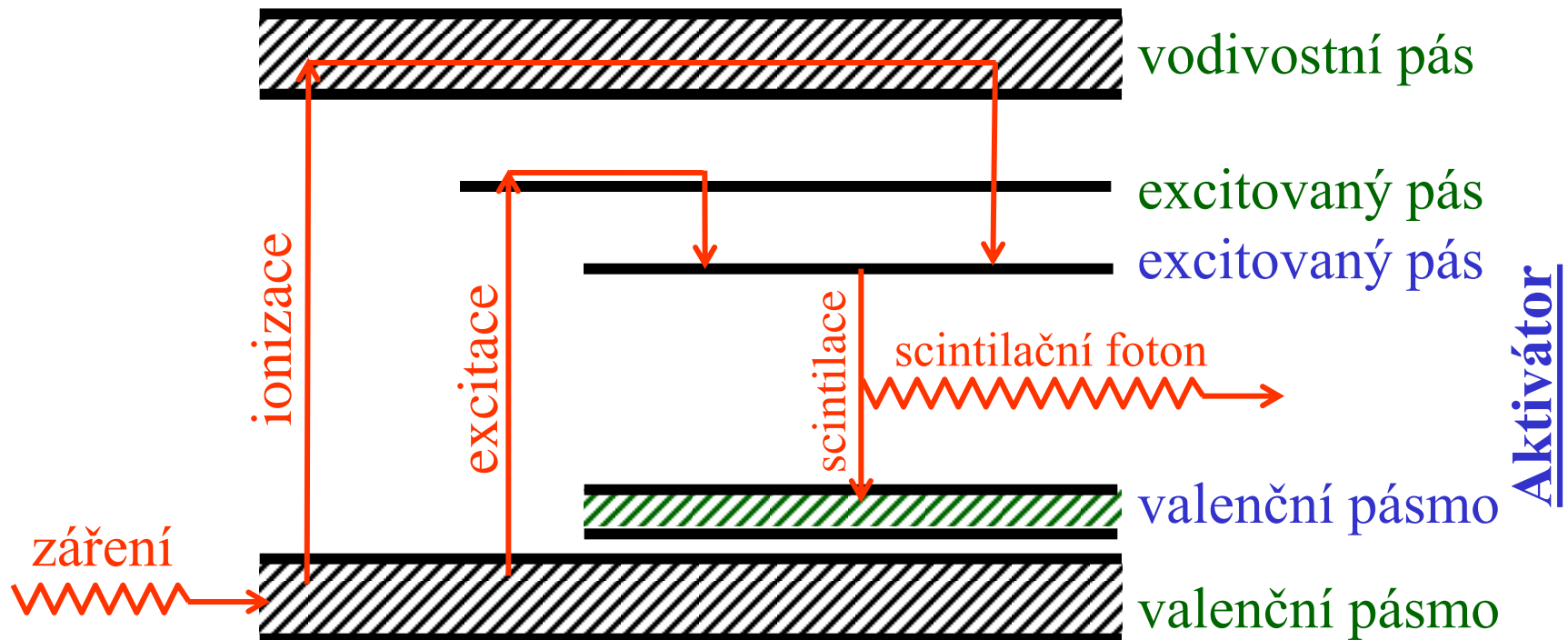
Anorganické scintilátory - krystaly:



Scintilační detektory 3

- aktivované příměsí
 - ZnS, CdS+Ag, Cu, Mn
 - $\text{Me}^{\text{I}}\text{X}+\text{Tl}$, Pb, Eu, In
- samoaktivované
 - ZnS, CdS+nadbytek Zn, Cd
- čisté krystaly
 - $\text{Me}^{\text{I}}\text{X}$, soli U, $(\text{REE})_2\text{S}_3$

Aktivované krystaly



Scintilační detektory 4

Organické scintilátory

- krystaly
- kapalné
- plastické
- unitární
- binární
- terciální

Krystaly: anthracen
trans-stilben
quaterfenyl

Kapalné: binární - rozpouštědlo: toluen, xylen, 1,4-dioxan

- aktivátor: PPO (2,5-difenyloxazol)

PBD (2-fenyl-5-(4-bifenyl)-1,3,4-oxadiazol)

TP (p-terfenyl)

terciální - R

- A

- „posunovač“ spektra (shifter)

Např.: POPOP (1,4-di-(3-(5-fenyloxazolyl))-benzen) dimetyl-POPOP

Scintilační detektory 5

Plastické: „rozpouštědlo“: polyvinyltoluen, polystyren

aktivátor: TP (30-40 g/L)

shifter: p,p'-difenylstilben, tetrafenylbutadien

ROZLIŠENÍ

$$dE^2 = dE_1^2 + dE_2^2 + dE_3^2 + dE_4^2 + dE_5^2$$

vznik excitací
(vnitřní rozlišení)

přenos
světla

konverze na
fotoelektrony
na fotokatodě

sekundární
emise na
dynodách

fluktuace
„temného proudu“

Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

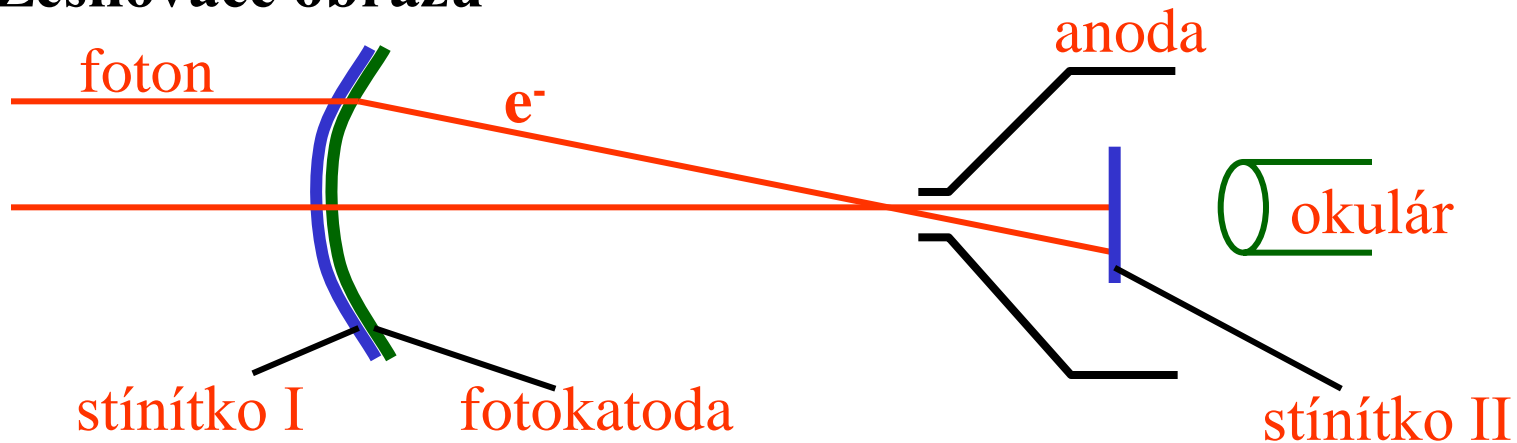
Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

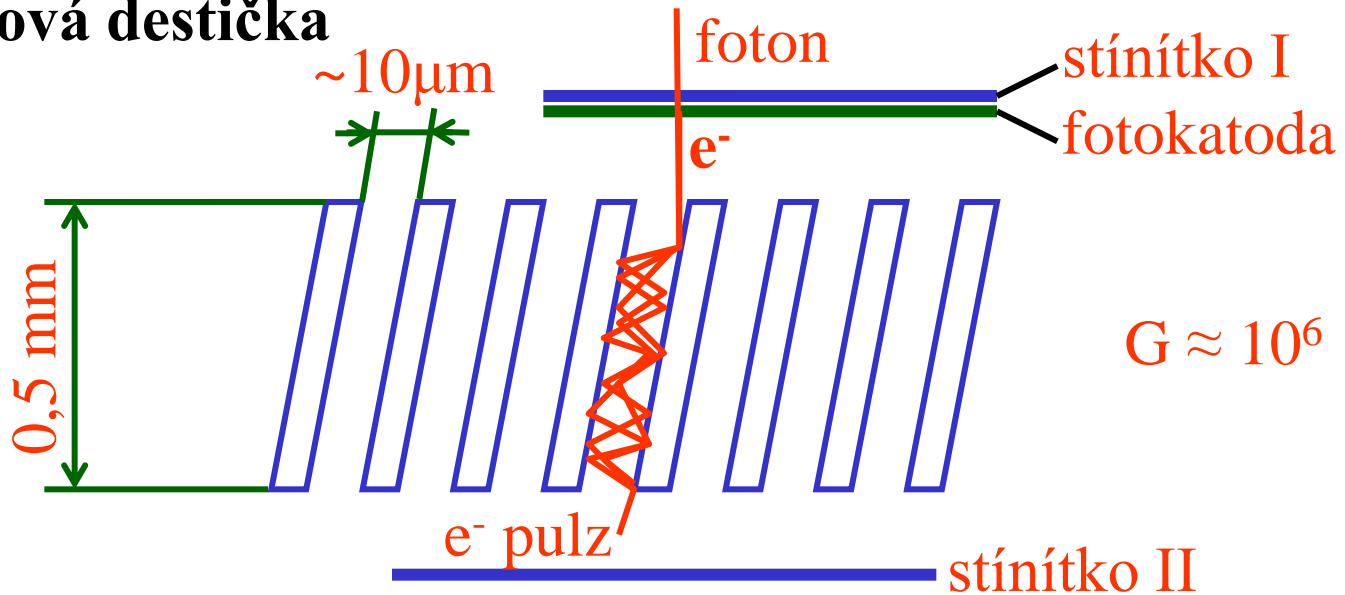
Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing

Zobrazovací systémy

Zesilovače obrazu



Kanálková destička



Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

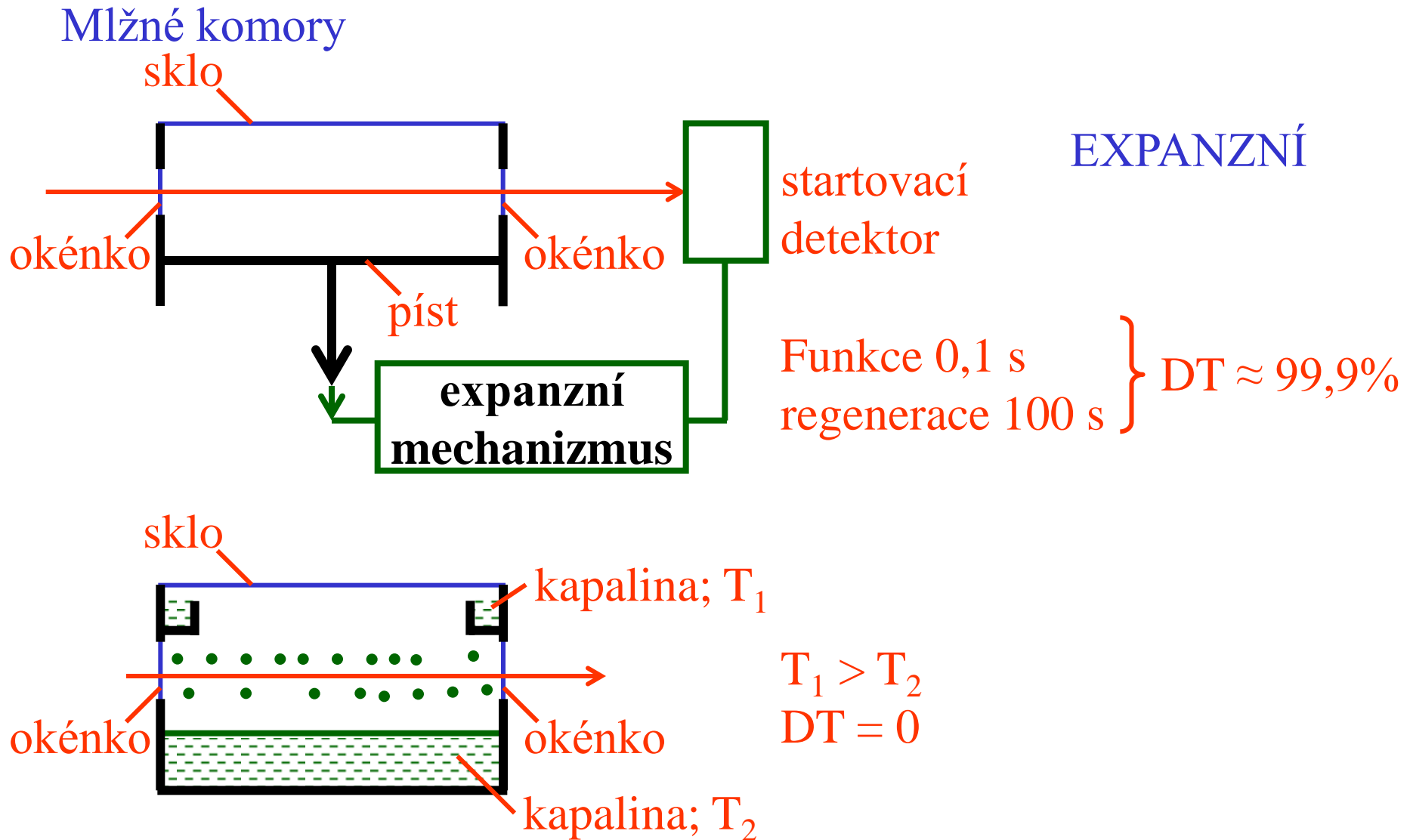
Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

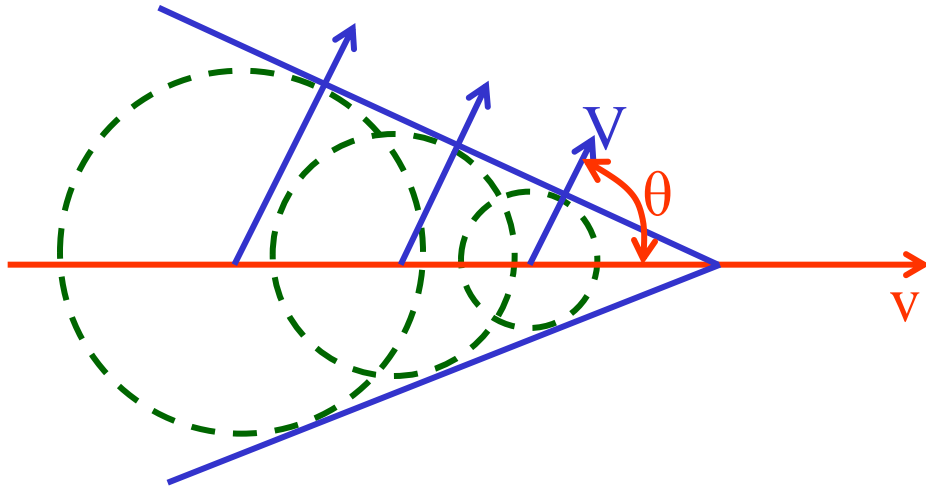
Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing

Detektory pro VE



Detektory pro VE 2

Čerenkovovy počítače



$$\cos(\theta) = \frac{V}{v}$$

$$V = \frac{c}{n} \quad (c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\longrightarrow \cos(\theta) = \frac{c}{v \cdot n}$$

$n \approx 1,5$ (sklo, plexi) \rightarrow prahová rychlost $v_p \approx 0,67c$

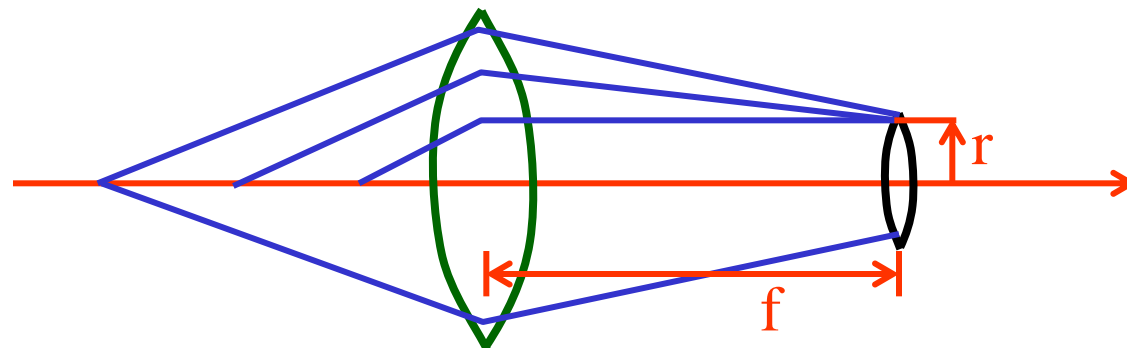
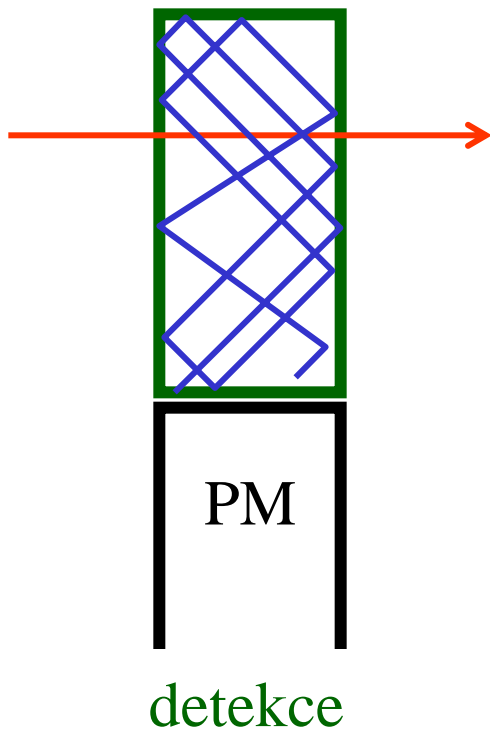
$E = f(v, m) \rightarrow$ různé E_p :

Částice	E_p
α	1600 MeV
p	320 MeV
Π	48 MeV
μ	36 MeV
e^- , β	0,175 MeV

Detektory pro VE 3

Prahový Č. detektor

Diferenciální Č. detektor



$$\theta = \frac{r}{f}$$

$$\Delta E \approx 0,5\%$$

měření energie

Souvislosti

Detektory Detectors

Plynové detektory Gas counters
Pevnolátkové detektory Solid-state detectors
Scintilační detektory Scintillation detectors
Visuální zobrazovací systémy Visual imaging systems
Detektory pro oblast vysokých energií High-energy particle detectors

Vlastnosti (schopnosti) Properties

Detekce Detection
Měření energie Energy measurement
Měření polohy Position measurement
Měření času Time measurement
Diskriminace (Rozlišení) Discrimination
Vznik signálu (Typ výstupního signálu) Signal formation

Oblasti použití Functions

Měření počtu impulzů („Detekce“) Counting
Spektrometrie Spectrometry
Měření dávek (Dozimetrie) Dosimetry
Zobrazování Imaging
Časově závislá měření Timing



Polovodičové detektory

Si, Ge, GaAs, CdTe, InSb, GaSb

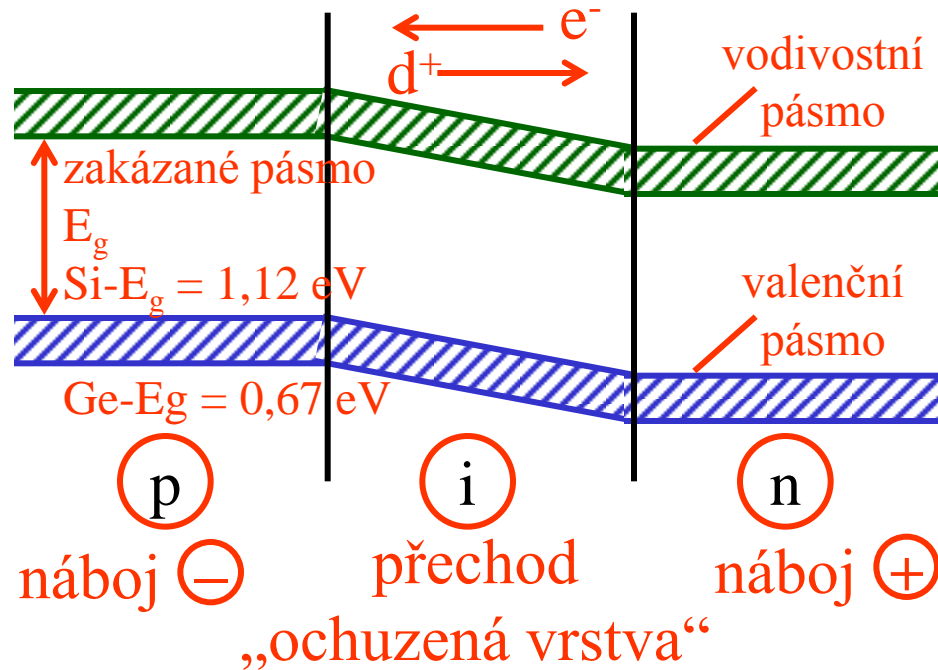
Příměsi:

III+

B, Al, Ga, In

→ e⁻ chybí do vazby

→ d⁺ „díry“



Příměsi:

V+

P, As, Sb

→ e⁻ navíc

$$Q = \frac{E \cdot e^-}{\varepsilon}$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{E \cdot e^-}{\varepsilon \cdot C}$$

$$C = \sum C_{DET} + C_{PZ}$$

ε	materiál
3,6 eV	Ge
2,8 eV	Si

Polovodičové detektory 2

Detektory – přechodové – povrchové bariérové

– difúzní

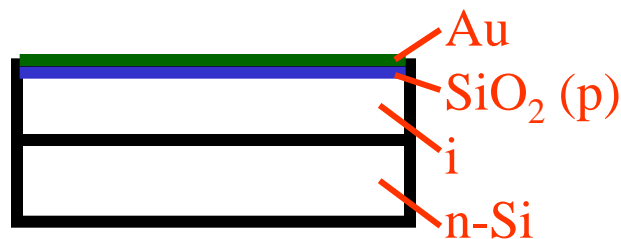
– iontově implantované

– velkoobjemové diody – planární

– koaxiální – s otevřeným koncem

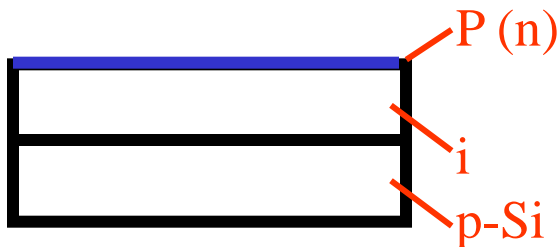
– s uzavřeným koncem

P-B



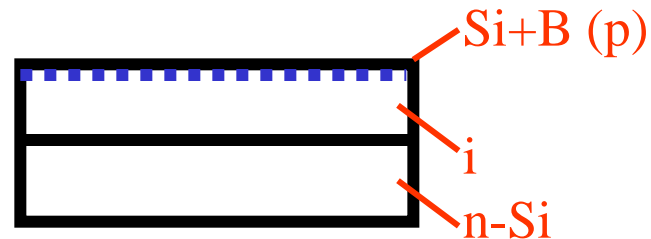
i – 3-5 mm

DIFÚZNÍ



silné okénko

I. IMPLANTOVANÉ

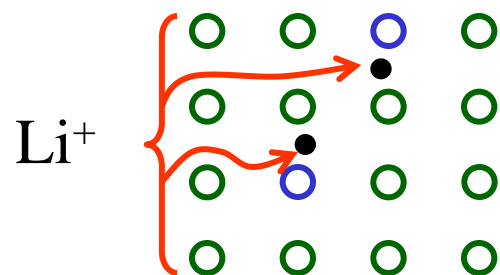


radiační poškození Si

FWHM $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \sim 10 \text{ keV} \\ e^- (650 \text{ keV}) \sim 2 \text{ keV} \end{array} \right.$

Polovodičové detektory 3

Driftování Li



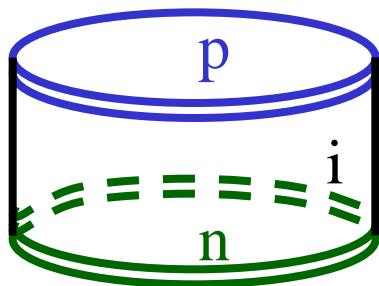
○ - Ge(Si) – p

○ - p-nečistota (III⁺) } **neutrální**

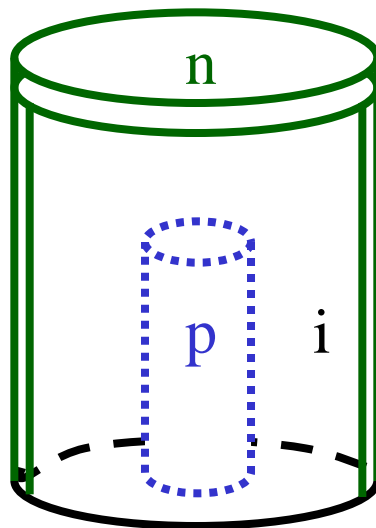
● - Li⁺ iont

} **páry**

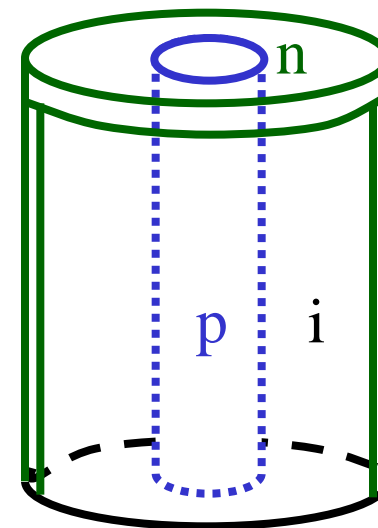
planární



koaxiální



s uzavřeným koncem



s otevřeným koncem

Polovodičové detektory 4

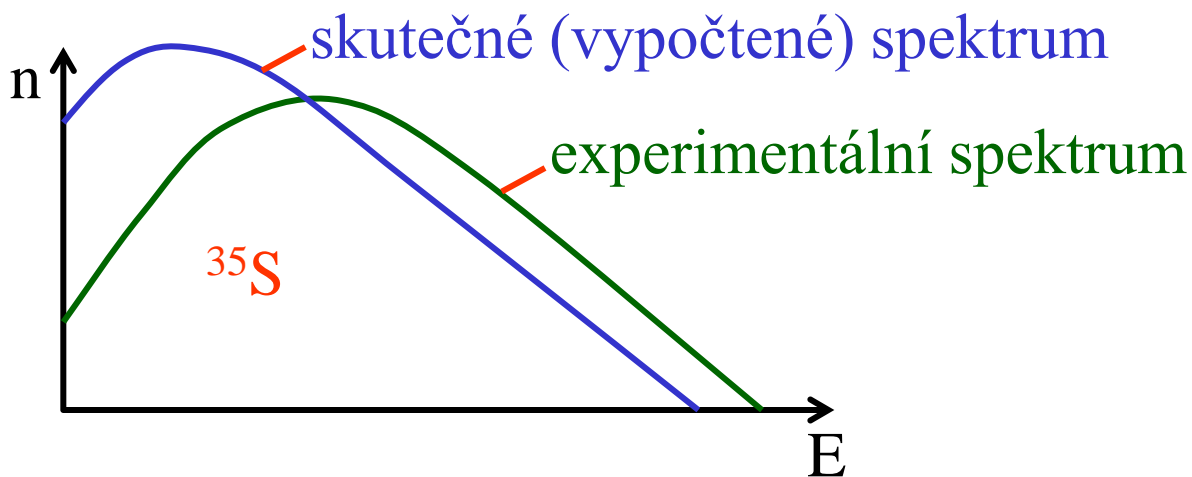
Měření energie

FWHM $\sim 1\%$ + PZ („FET“ – tranzistor)

α :

Detektor	E_α [MeV]	FWHM [keV]
SSB	5,48	11
ionizační komora	5,68	14
mag. spektrometr	6,11	3,5
Scintilátor CsI(Tl)	5,31	95

e^- , β^- :



Polovodičové detektory 5

n: „SANDWICH“-ový spektrometr

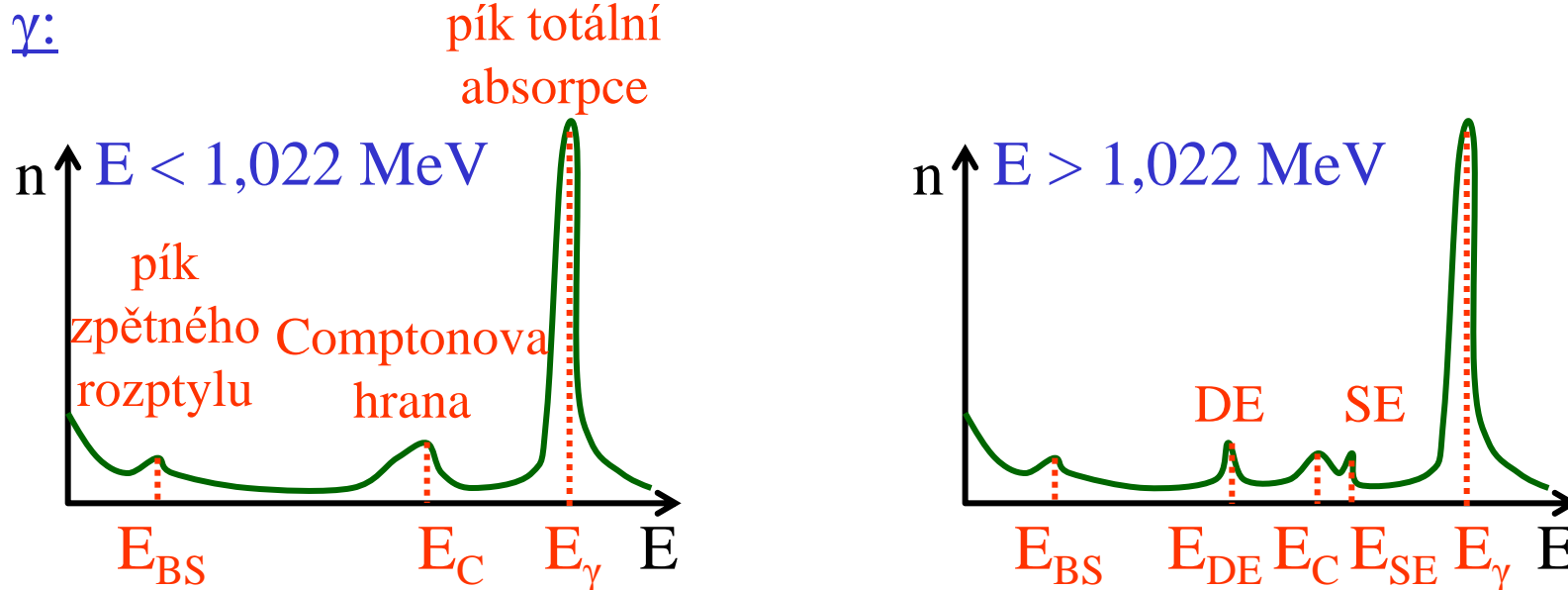


${}^6\text{Li} (+ n \rightarrow \alpha + T + 4,777 \text{ MeV})$

${}^6\text{Li}$: FWHM > 35 keV

${}^3\text{He} (+ n \rightarrow p + T + 0,765 \text{ MeV})$

${}^3\text{He}$: FWHM ~ 100 keV



Polovodičové detektory 6

pokračování γ :

$$E_{BS} = E_\gamma - (E_e)_{\max} = \frac{E_\gamma}{1 + 4E_\gamma} [\text{MeV}]$$

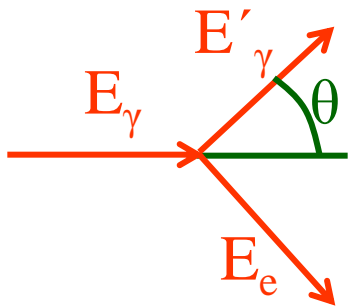
$$\lim_{E_\gamma \rightarrow \infty} E_{BS} = 0,25 [\text{MeV}]$$

$$E_C = (E_e)_{\max} = E_\gamma \frac{4E_\gamma}{1 + 4E_\gamma} [\text{MeV}]$$

$$\lim_{E_\gamma \rightarrow \infty} E_C = \lim_{E_\gamma \rightarrow \infty} (E_\gamma - E'_\gamma) = (E_\gamma - 0,25) [\text{MeV}]$$

$$E_{BS} + E_C = E_\gamma$$

Comptonův rozptyl:



$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)} \stackrel{m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV}}{=} \frac{E_\gamma}{1 + 2E_\gamma (1 - \cos \theta)}$$

$$E_e = E_\gamma - E'_\gamma = E_\gamma \frac{2E_\gamma (1 - \cos \theta)}{1 + 2E_\gamma (1 - \cos \theta)}$$

Veličiny a jednotky

Veličiny charakterizující zdroje a pole ionizujícího záření

Aktivita – A

$$A = dN_p/dt \text{ [Bq]} = [s^{-1}] \quad \text{Becquerel (Bq)}$$

$$a = A/m \text{ [Bq} \cdot \text{kg}^{-1}]$$

$$a_V = A/V \text{ [Bq} \cdot \text{m}^{-3}]$$

$$a_s = A/S \text{ [Bq} \cdot \text{m}^{-2}]$$

$$a_L = A/L \text{ [Bq} \cdot \text{m}^{-1}]$$

$$a_m = A/n \text{ [Bq} \cdot \text{mol}^{-1}]$$

Emise zdroje – ϕ_p

$$\phi_p = dN/dt \text{ [s}^{-1}]$$

Fluence částic – ϕ

$$\phi = dN/da_j \text{ [m}^{-2}]$$

Fluenční příkon – φ

$$\varphi = d\phi/dt \text{ [m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Veličiny a jednotky 2

Veličiny charakterizující zdroje a pole ionizujícího záření

Fluence energie – $\underline{\psi}$

$$\underline{\psi} = dE_n/da_j \text{ [J}\cdot\text{m}^{-2}\text{]}$$

Příkon fluence energie – $\underline{\psi}$

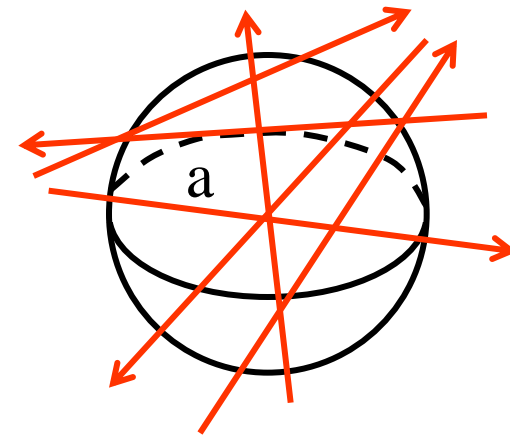
$$\psi = d\underline{\psi}/dt \text{ [W}\cdot\text{m}^{-2}\text{]}$$

Hustota proudu částic – \underline{J}

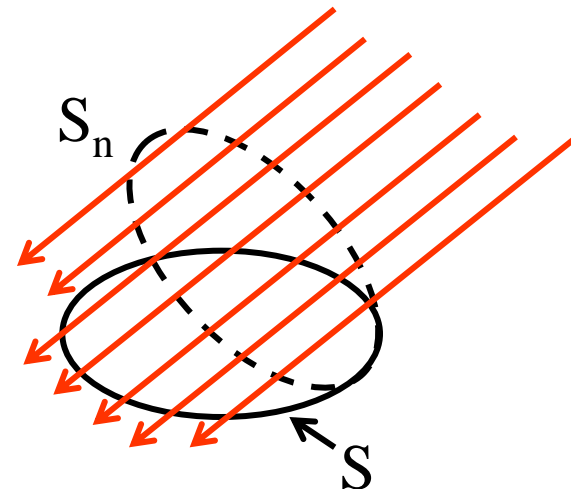
$$\underline{J} = n_0 \cdot \partial^2 N / \partial s_n \cdot \partial t \text{ [m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}\text{]}$$

Proud částic – \underline{I}

$$\underline{I} = \int_S \underline{J} dS_n \text{ [s}^{-1}\text{]}$$



...k definici hustoty toku částic



...k definici proudu částic

Veličiny a jednotky 3

Veličiny charakterizující interakci záření s látkou

Energie sdělená látce – E

$$E = Q_1 - Q_2 - \Delta m \cdot c^2 \text{ [J]}$$

Střední energie sdělená látce – \bar{E}

\bar{E} – nejpravděpodobnější hodnota E

Dávka – D

$$D = d\bar{E}/dm \text{ [Gy]} = [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}] \quad \text{Gray (Gy)}$$

Dávkový příkon – \dot{D}

$$\dot{D} = dD/dt \text{ [Gy} \cdot \text{s}^{-1}] = [\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}]$$

Kerma – K (**K**inetic **E**nergy **R**elaxed in **M**aterial)

$$K = dE_k/dm$$

Kermový příkon – \dot{K}

$$\dot{K} = dK/dt$$

Expozice – X

$$X = dQ/dm \text{ [C} \cdot \text{kg}^{-1}]$$

Expoziční příkon – \dot{X}

$$\dot{X} = dX/dt \text{ [A} \cdot \text{kg}^{-1}]$$

Veličiny a jednotky 4

Nové a starší dozimetrické veličiny – převodní vztahy

veličina	SI	stará	vztah
aktivita	Becquerel (Bq) [s ⁻¹]	Curie (Ci)	1Bq = 0,27·10 ⁻¹⁰ Ci 1Ci = 3,7·10 ¹⁰ Bq
dávka	Gray (Gy) [J·kg ⁻¹]	RAD (rad) [100·ERG·g ⁻¹]	1Gy = 100 rad 1rad = 10 ⁻² Gy
expoze	Coulomb·kilogram ⁻¹ [C·kg ⁻¹]	RÖNTGEN (R)	1C·kg ⁻¹ = 3876 R 1R = 2,58·10 ⁻⁴ C·kg ⁻¹
dávkový ekvivalent	Sievert (Sv) [Gy·QF]	REM (rem) [RAD·QF]	1Sv = 100 rem 1rem = 10 ⁻² Sv

„jakostní faktor“ (Quality Factor)

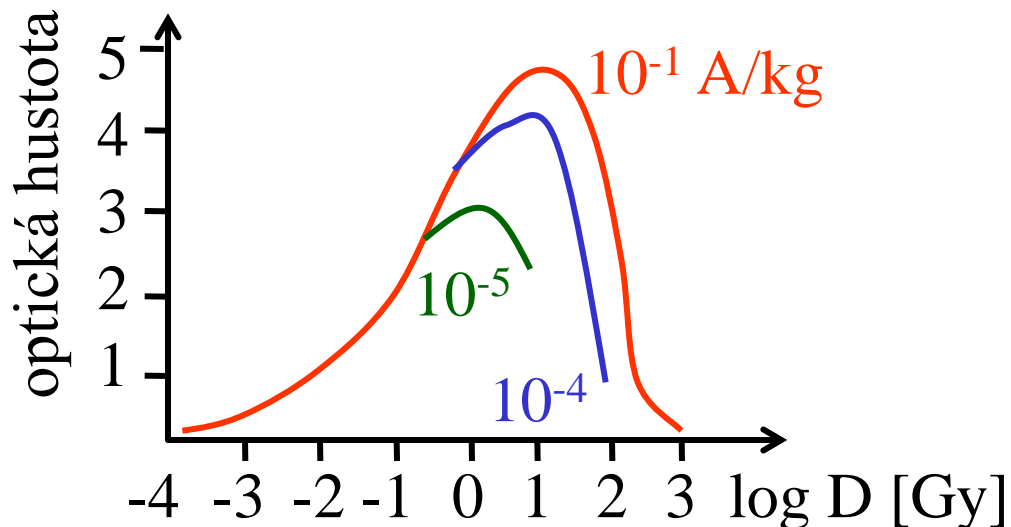
fotony	1	n (E _n ∈ <1keV; 500 keV)	8
e ⁻ , β (E _{max} > 30keV)	1	n (E _n ∈ <500keV; 10 MeV)	10
e ⁻ , β (E _{max} < 30keV)	1,7	p, α	10
n _t	3	jádra, štěpné fragmenty	20
n (E _n ∈ <0,5eV; 1keV)	2,5		

Integrální dozimetrické metody

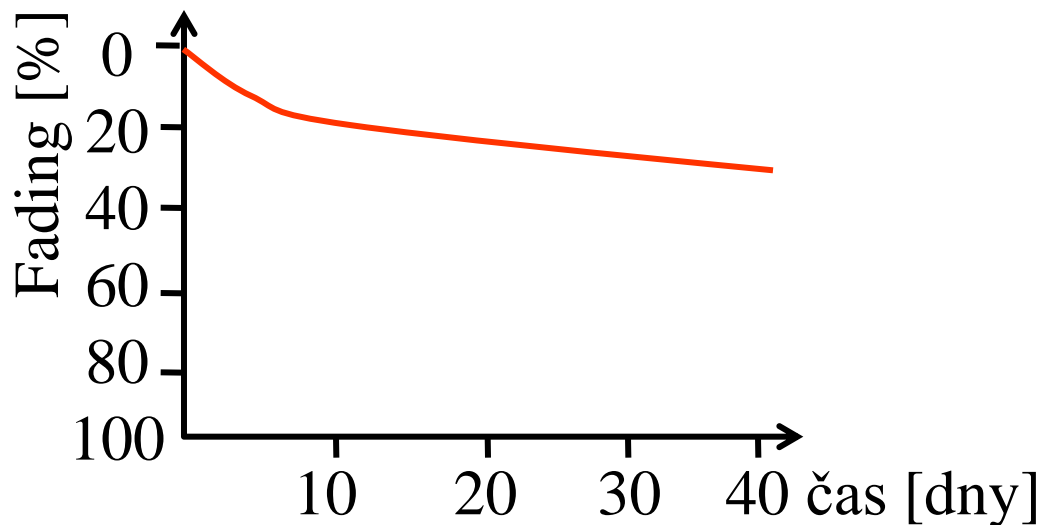
Charakteristika křivky fotografického materiálu

(**Solarisation**: a phenomenon in photography in which the image recorded is wholly or partially reversed in tone. Synonymous with the **Sabattier effect**.)

The mechanism is due to halogen ions released within the halide grain by exposure diffusing to the grain surface in amounts sufficient to destroy the latent image.)

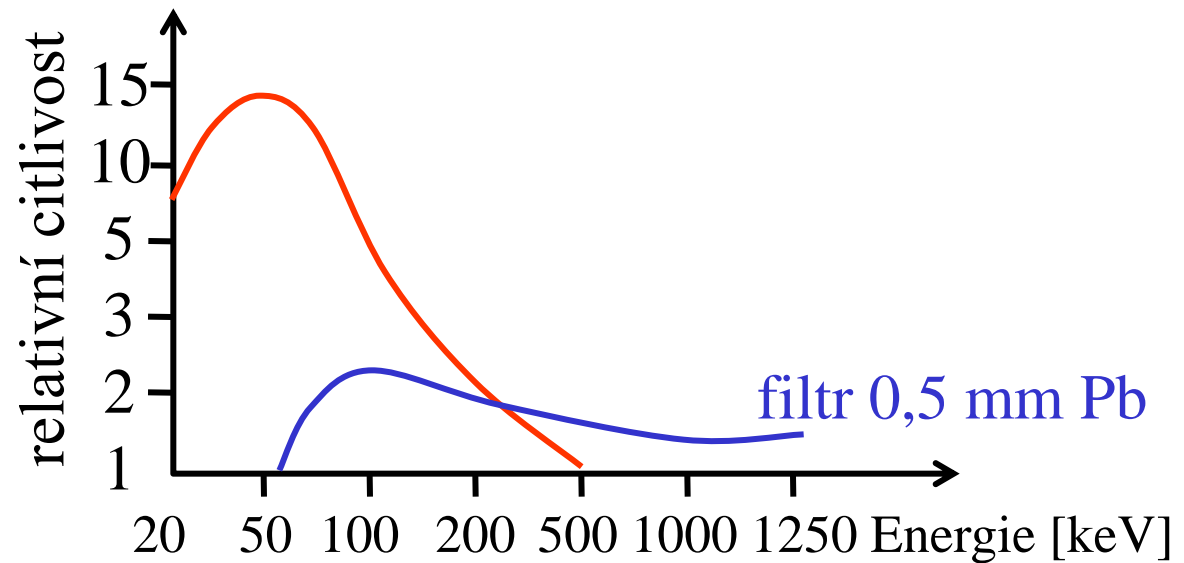


Fading - film



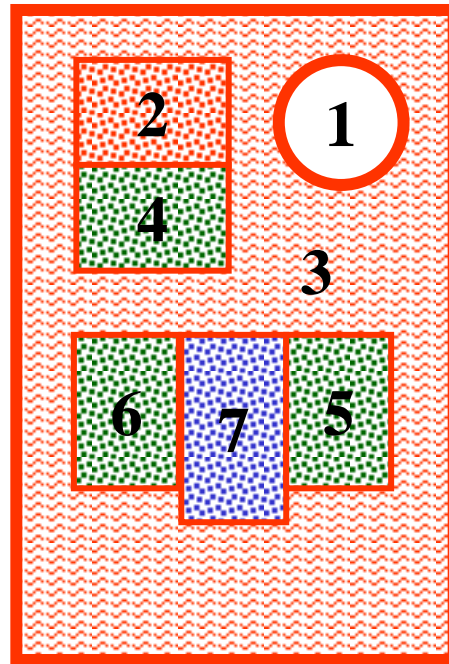
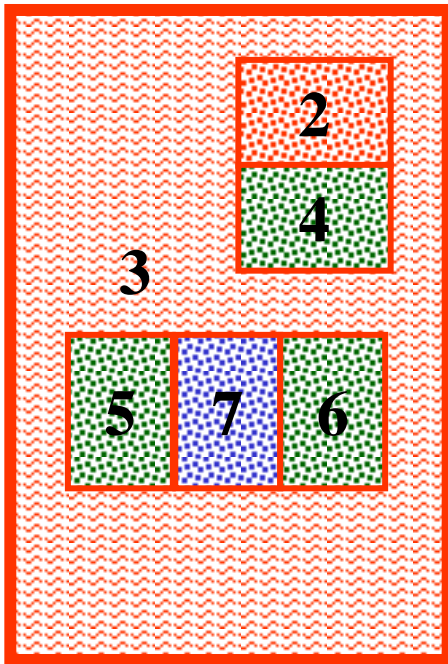
Integrální dozimetrické metody 2

Energetická závislost
filmu



Integrální dozimetrické metody 3

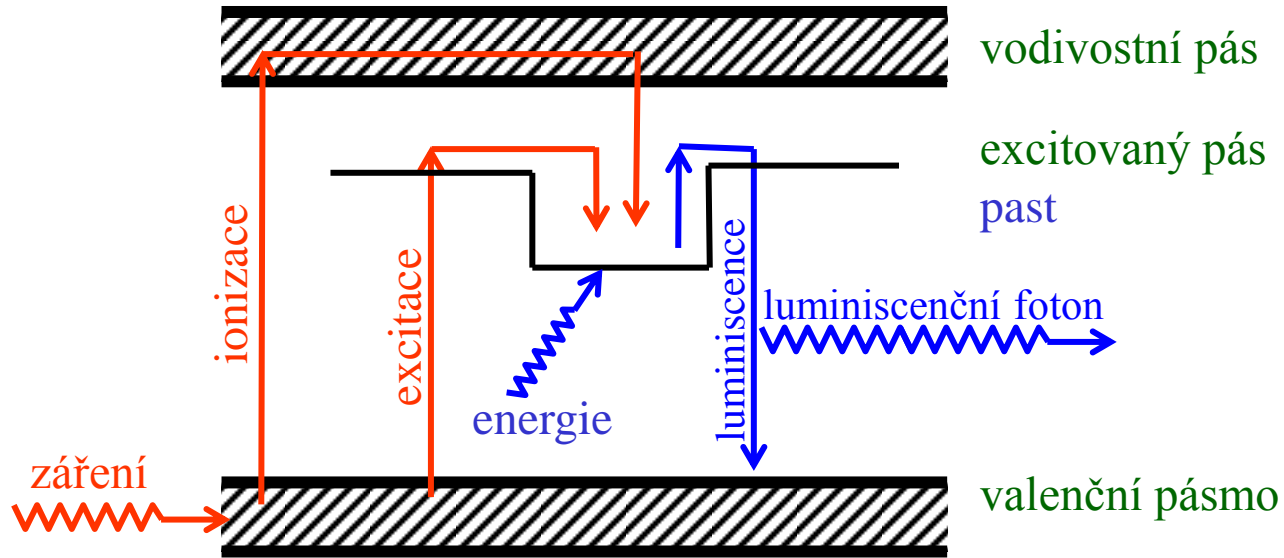
Filmový osobní dozimetr



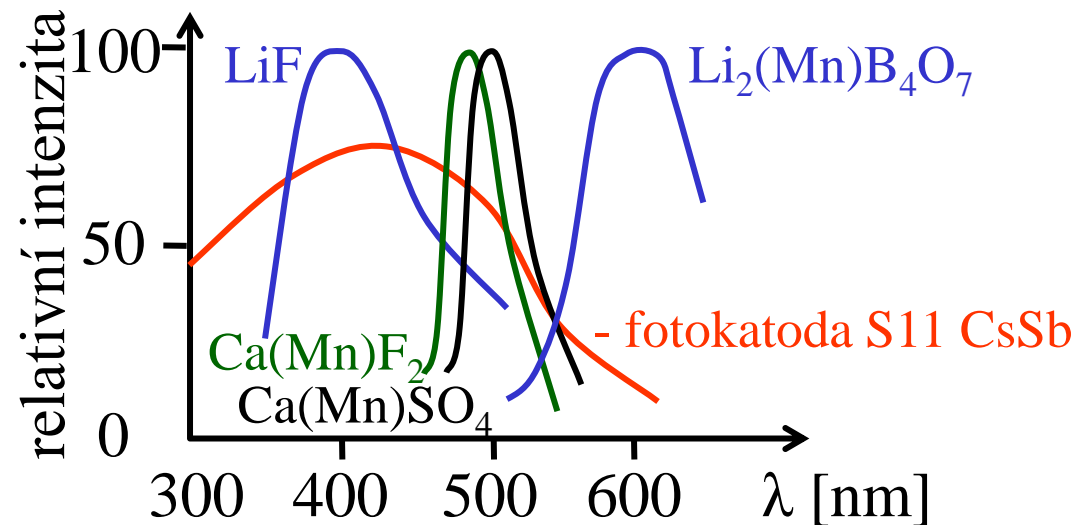
- 1 – otvor - X, β
- 2 – $150 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-2}$ plast - β
- 3 – $300 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-2}$ plast - β
- 4 – 0,05 mm Cu - X, β
- 5 – 1,5 mm Cu - X
- 6 – 0,5 mm Cu - X
- 7 – 0,5 mm Pb - γ

Integrální dozimetrické metody 2

TLD

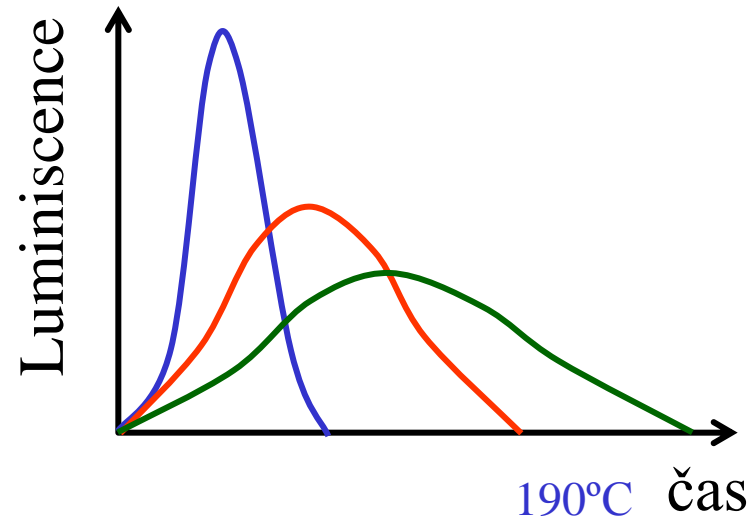


Emisní spektra některých TLD

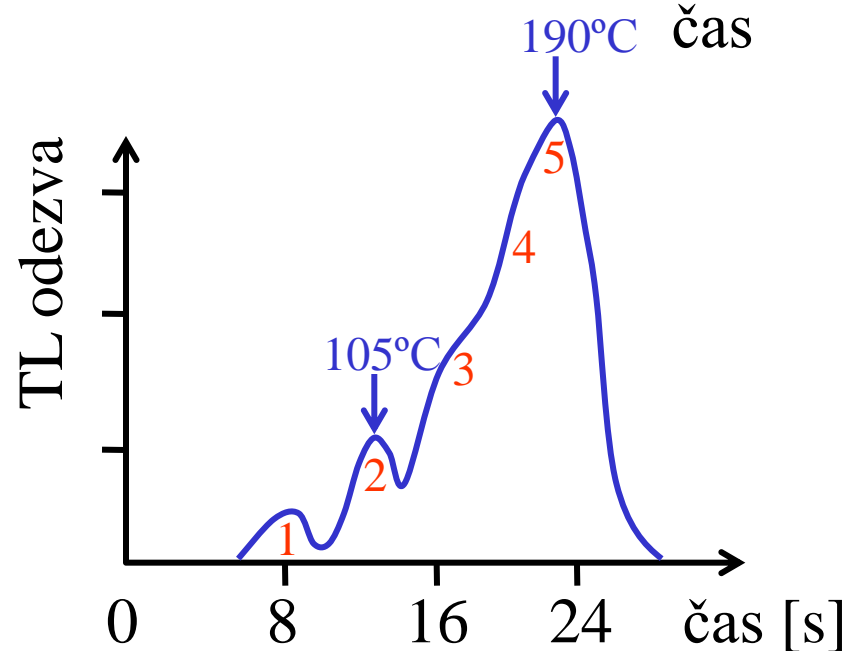


Integrální dozimetrické metody 4

Vyhřívací křivky
s jedním maximem

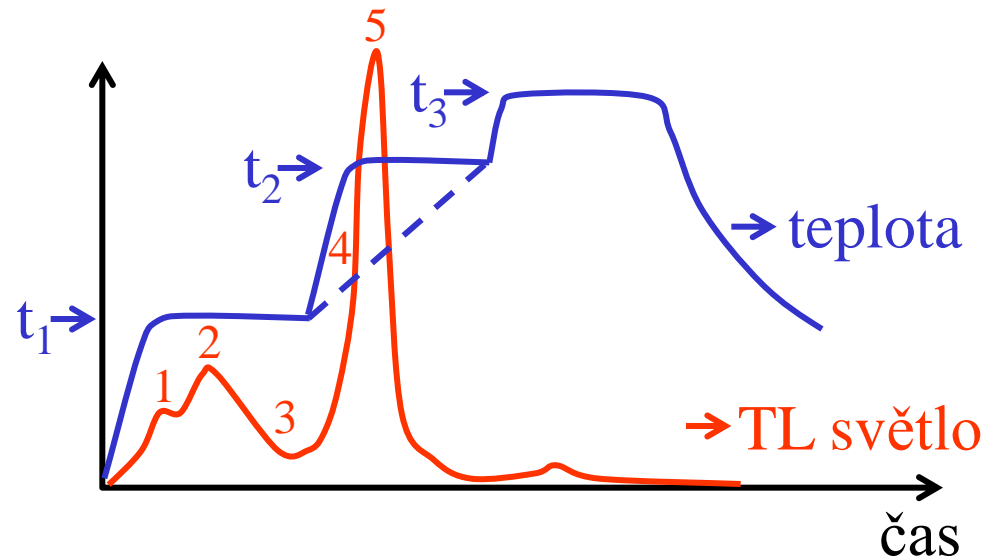


Vyhřívací křivka LiF (TLD 100)

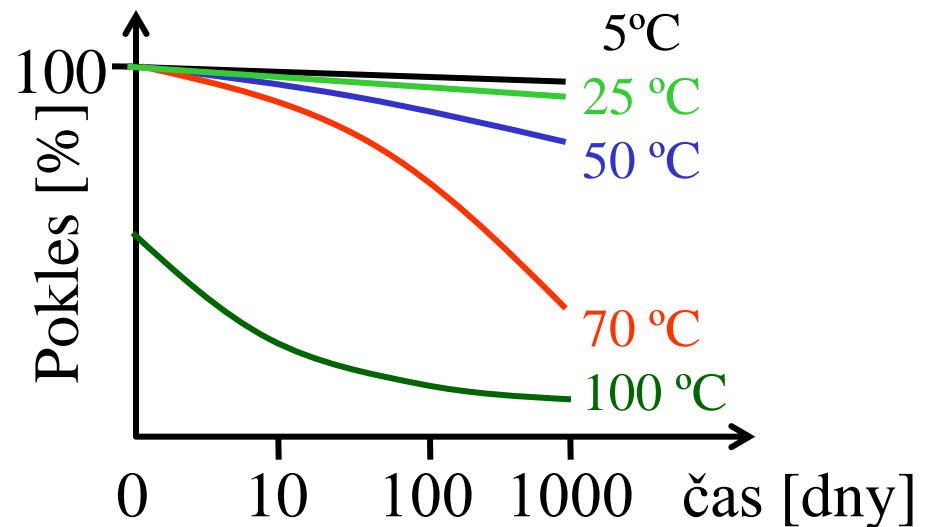


Integrální dozimetrické metody 5

Naprogramovaná vyhřívací křivka LiF

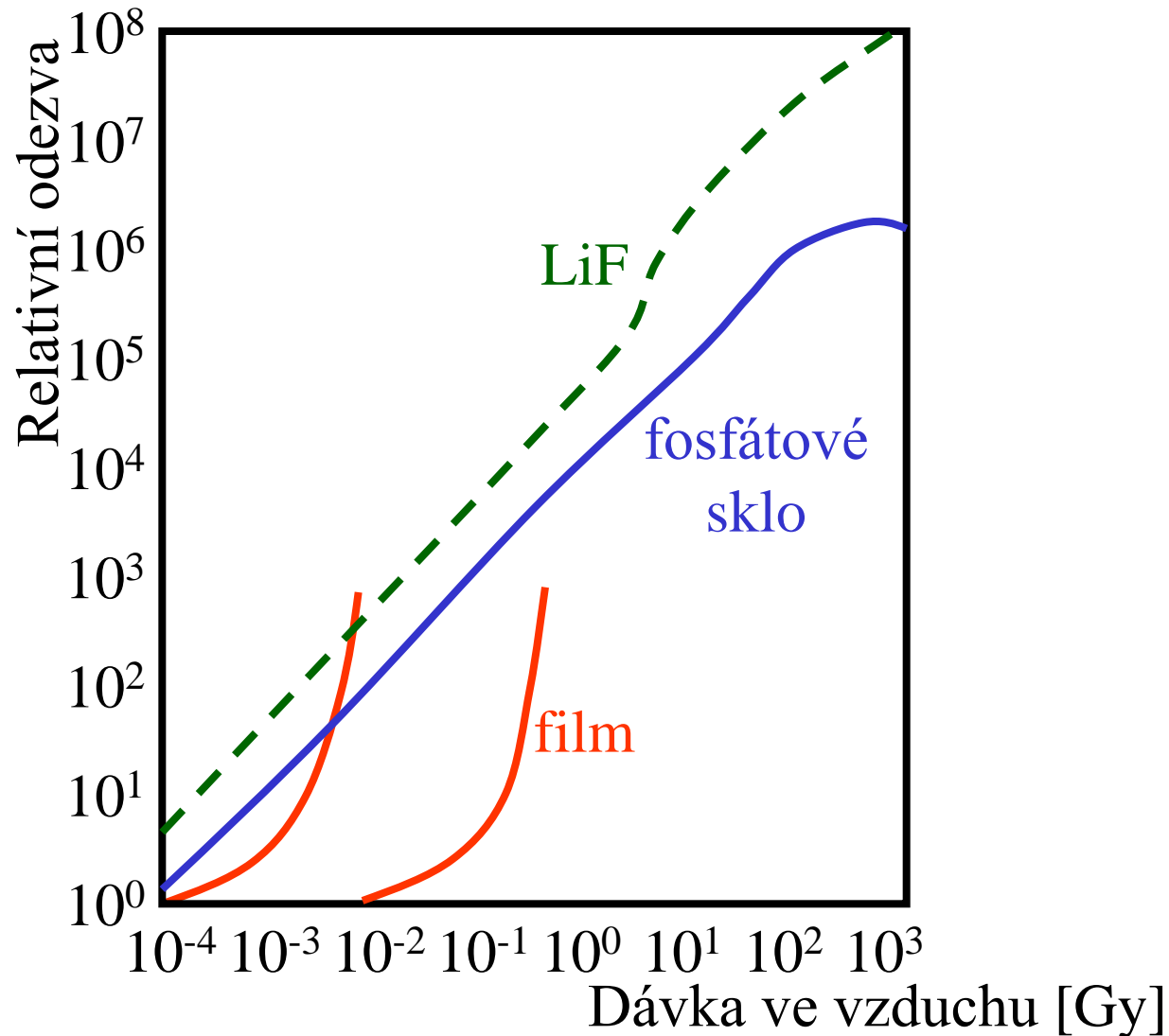


Fading dozimetrů TLD 700



Integrální dozimetrické metody 6

Srovnání rozsahu měření dozimetrů



Statistika

N-krát x \rightarrow $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$

„Suma“ $\Sigma \equiv \sum_{i=1}^N x_i$

„Aritmetický průměr“ $\bar{x}_e = \Sigma / N$

„Frekvenční distribuční funkce“ $F(x) = \frac{\text{počet výskytů „x“}}{N}$

$$\rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1$$

$$\rightarrow \bar{x}_e = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot F(x) \quad \underline{\text{Dz:}} \quad \sum_{x=0}^{\infty} F(x) \cdot x = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \bar{x}_e$$

„Odchylka“ $\varepsilon_i \equiv x_i - \bar{x}_e \rightarrow \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 0$

„Rozptyl“ $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_e)^2$

(Správně: $s^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow s^2 \equiv \sum_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot F(x)$)

Statistika 2

Příklady binárních procesů

pokus	úspěch	„p“
mince	„panna“	1/2
kostka	„6“	1/6
pozorování rad. jádra po dobu „t“	„rozpadne se“	$1 - e^{-\lambda t}$

Binomické rozdělení

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Poissonovo rozdělení $p \ll 1$

$$\bar{x} = p \cdot n \quad \sigma^2 = \bar{x}(1-p)$$

$$P(x) = \frac{(pn)^x e^{-pn}}{x!} = \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!} \quad (pn = \bar{x})$$
$$\sigma^2 = \bar{x}$$

Statistika 3

Gaussovo (normální) rozdělení

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}\right]$$

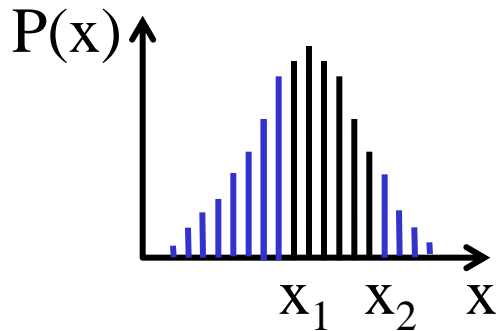
$$p \ll 1, \quad \bar{x} = 20 - 30$$

$$\varepsilon = x - \bar{x}$$

$$\bar{x} = pn$$

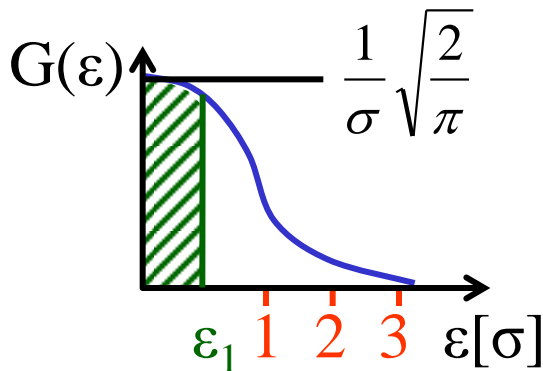
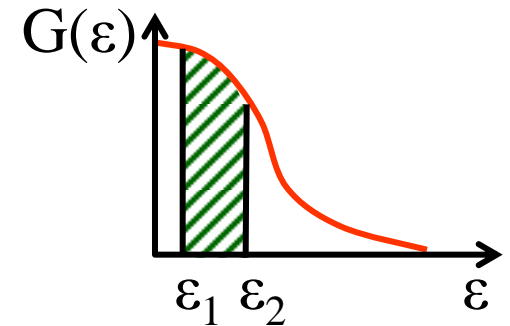
$$G(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi\bar{x}}} \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\bar{x}}\right)$$

$$\sigma^2 = \bar{x}$$



$$\sum_{x_1}^{x_2} P(x) \approx p; \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} G(\varepsilon) d\varepsilon \approx p; \quad \varepsilon \in \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$$



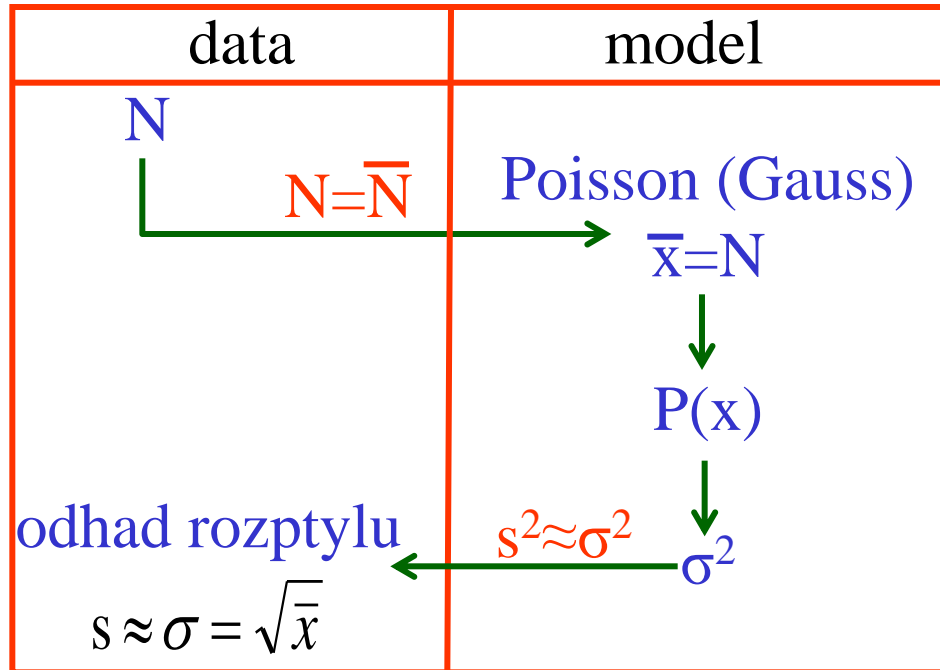
$$\int_0^{\varepsilon_0} G(\varepsilon) d\varepsilon = F(\varepsilon_0)$$

$$p; \quad \varepsilon < \varepsilon_0$$

ε_0	$F(\varepsilon_0)$	ε_0	$F(\varepsilon_0)$
$0,674\sigma$	0,5	$1,96\sigma$	0,950
1σ	0,683	$2,58\sigma$	0,990
$1,64\sigma$	0,900	$3,00\sigma$	0,997

Statistika 4

Odhad přesnosti jednoho měření



Př.: $N = 100$

$$\sigma = \sqrt{N} = 10$$

	Interval	$p_i \bar{x} \in \text{interval}$
$x \pm 0,67\sigma$	93,3 – 106,7	50 %
$x \pm \sigma$	90 – 110	68 %
$x \pm 1,64\sigma$	83,6 – 116,4	90 %
$x \pm 2,58\sigma$	74,2 – 125,8	99 %

Statistika 5

Zákon šíření chyb

$$u = f(y, x, z, \dots) = f(x_i)$$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2$$

Rozdíl nebo součet počtu impulzů

$$N = N_1 + N_2$$

$$N = N_1 - N_2$$

$$\frac{\partial N}{\partial N_1} = 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial N_2} = \pm 1$$

$$\sigma_N^2 = 1^2 \cdot \sigma_{N_1}^2 + (\pm 1)^2 \sigma_{N_2}^2$$

$$\sigma_N = \sqrt{\sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2}$$

Odečítání pozadí:

$$\sigma_N = \sqrt{N_{VP} + N_P}$$

N – vzorek

N_{VP} – vzorek + pozadí

N_P – pozadí

Statistika 6

Násobení nebo dělení konstantou

$$u = A \cdot x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A$$

$$\sigma_u = A \cdot \sigma_x$$

$$s_r(u) = \frac{\sigma_u}{u} = \frac{A \cdot \sigma_x}{A \cdot x} = \frac{\sigma_x}{x}$$

$$u = \frac{x}{B}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{B}$$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x}{B}$$

$$s_r(u) = \frac{\sigma_u}{u} = \frac{B \cdot \sigma_x}{B \cdot x} = \frac{\sigma_x}{x}$$

Četnost impulzů:

$$n = \frac{N}{t} : \quad \sigma_n = \frac{\sigma_N}{t} = \frac{\sqrt{N}}{t} = \sqrt{\frac{n}{t}}$$

$$s_r(n) = \frac{\sqrt{\frac{n}{t}}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot t}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Statistika 7

Odečítání pozadí pro četnosti:

$$n = \frac{N_{VP}}{t_{VP}} - \frac{N_P}{t_P}$$

$$\frac{\partial n}{\partial N_{VP}} = \frac{1}{t_{VP}}$$

$$\frac{\partial n}{\partial N_P} = -\frac{1}{t_P}$$

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{1}{t_{VP}}\right)^2 \cdot \sigma_{N_{VP}}^2 + \left(-\frac{1}{t_P}\right)^2 \sigma_{N_P}^2 = \frac{N_{VP}}{t_{VP}^2} + \frac{N_P}{t_P^2} = \frac{n_{VP}}{t_{VP}} + \frac{n_P}{t_P}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{n_{VP}}{t_{VP}} + \frac{n_P}{t_P}}$$

$$t_{VP} = t_P = t \Rightarrow$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{n_{VP} + n_P}{t}} = \sqrt{\frac{N_{VP} + N_P}{t^2}} = \frac{\sqrt{N_{VP} + N_P}}{t}$$

Statistika 8

Násobení nebo dělení impulzů

$$u = x \cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

$$\sigma_u^2 = y^2 \cdot \sigma_x^2 + x^2 \cdot \sigma_y^2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$$

$$s_r(u) = \sqrt{s_r^2(x) + s_r^2(y)}$$

$$u = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_x^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^4} \sigma_y^2 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$$

$$s_r(u) = \sqrt{s_r^2(x) + s_r^2(y)}$$

Relativní počet impulzů (poměr počtu impulzů):

$$R = \frac{N_1}{N_2} \quad s_r(R) = \frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\frac{N_1}{N_1^2} + \frac{N_2}{N_2^2}} = \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}} \quad \sigma_R = R \cdot \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}$$

Statistika 9

Průměr několika měření počtu impulzů

$$N_1, N_2, \dots, N_k \quad \Sigma = N_1 + N_2 + \dots + N_k$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial N_i} = 1 \quad \longrightarrow \quad \sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 + \dots + \sigma_{N_k}^2$$

$$\sigma_{N_i} = \sqrt{N_i} \quad \longrightarrow \quad \sigma_{\Sigma}^2 = \Sigma$$

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{\Sigma}$$

$$\bar{N} = \frac{\Sigma}{k}$$

$$\sigma_{\bar{N}} = \frac{\sigma_{\Sigma}}{k} = \frac{\sqrt{\Sigma}}{k} = \frac{\sqrt{k \cdot \bar{N}}}{k}$$

$$\sigma_{\bar{N}} = \sqrt{\frac{\bar{N}}{k}}$$

Statistika 10

Optimalizace měření n : $n_V, t_V, N_V, n_p, t_p, N_p$

1. Optimální poměr t_V a t_p

$$n = \frac{N_V}{t_V} - \frac{N_p}{t_p} \quad \sigma_n^2 = \frac{n_V}{t_V} + \frac{n_p}{t_p}$$

$t = t_V + t_p$, hledáme optimální poměr \Rightarrow derivace

$$2\sigma_n d\sigma_n = -\frac{n_V}{t_V^2} dt_V - \frac{n_p}{t_p^2} dt_p$$

Optimum: $d\sigma_n = 0$ (platí $t = \text{konst.} \Rightarrow dt_V + dt_p = 0$)

$$\left(\frac{t_V}{t_p} \right)_{opt} = \sqrt{\frac{n_V}{n_p}}$$

Statistika 11

V optimu:

$$\sigma_n^2 = \frac{n_V}{t_V} + \frac{n_p}{t_V} \sqrt{\frac{n_V}{n_p}}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{n_V}{t_p} \sqrt{\frac{n_p}{n_V}} + \frac{n_p}{t_p}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{t_V} \left(n_V + \sqrt{n_V \cdot n_p} \right)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{t_p} \left(n_V + \sqrt{n_V \cdot n_p} \right)$$

$$t_V = \frac{n_V + \sqrt{n_V \cdot n_p}}{\sigma_n^2}$$

$$t_p = \frac{n_p + \sqrt{n_V \cdot n_p}}{\sigma_n^2}$$

$$t_V = \frac{n_V + \sqrt{n_V \cdot n_p}}{s_r^2 (n_V - n_p)^2}$$

$$t_p = \frac{n_p + \sqrt{n_V \cdot n_p}}{s_r^2 (n_V - n_p)^2}$$

$$t = t_V + t_p = \frac{n_V + 2\sqrt{n_V \cdot n_p} + n_p}{s_r^2 (n_V - n_p)^2} = \frac{(\sqrt{n_V} + \sqrt{n_p})^2}{s_r^2 (n_V - n_p)^2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{s_r^2 (\sqrt{n_V} - \sqrt{n_p})^2}$$

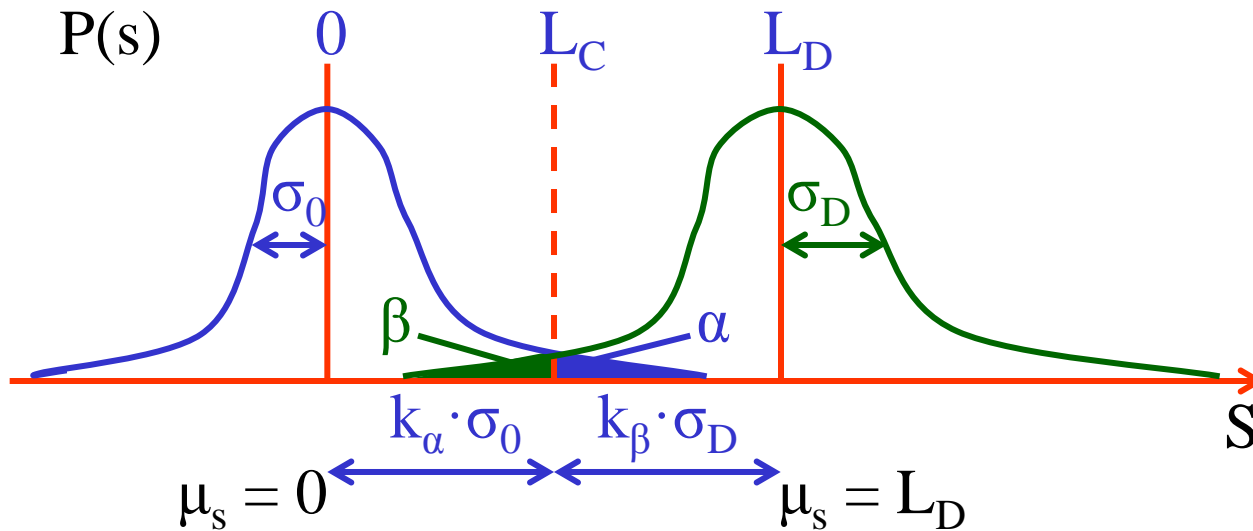
Statistika 12

2. Greenfieldovo kriterium

$$t \cdot s_r^2 \left(\sqrt{n_V} - \sqrt{n_p} \right)^2 = 1$$

- a) $n_V, n_p, s_r \rightarrow t$
- b) $n_V, n_p, t \rightarrow s_r$
- c) $t, s_r, n_p \rightarrow n_V$
- d) $\max(\sqrt{n_V} - \sqrt{n_p})^2$

Meze stanovitelnosti a dokazatelnosti



chyba	skutečnost	tvrzení
1. druhu – α	látka není	Je
2. druhu – β	látka je	není

$$L_C = k_\alpha \cdot \sigma_0$$

$$L_D = L_C + k_\beta \cdot \sigma_D$$

$$L_Q = k_Q \cdot \sigma_Q \quad k_Q = 1/S_r$$

Meze 2

Metoda	L_c	L_D	L_Q
Párové pozorování	$2,33\sigma$	$4,65\sigma$	$14,1\sigma$
Známé pozadí	$1,64\sigma$	$3,29\sigma$	10σ

95% ($k_\alpha = 1,645$)

$k_Q = 10$

$$(\sigma_0)^2 = (\sigma_{s+p})^2 + (\sigma_p)^2$$

párové $((\sigma_{s+p})^2 + (\sigma_p)^2) = 2\sigma^2$
známé pozadí $((\sigma_p)^2 = 0) = (\sigma_{s+p})^2$

Měření četnosti impulzů

Meze 3

$$L_C = n_{NV}$$

$$\sigma_0^2 = \sigma_V^2 + \sigma_p^2$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\bar{n}_p}{t_V} + \frac{\bar{n}_p}{k \cdot t_p}$$

$$n = n_V - n_p = 0$$

$$\bar{N}_p = \frac{\sum N_p}{k}$$

$$n_{NV} = k_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\bar{n}_p}{t_p} \left(\frac{1}{k} + \frac{t_p}{t_V} \right)}$$

$$L_D = n_{ND}$$

$$\sigma_{ND}^2 = \sigma_V^2 + \sigma_p^2$$

$$\sigma_{ND}^2 = \frac{n_{ND} + \bar{n}_p}{t_V} + \frac{\bar{n}_p}{k \cdot t_p}$$

$$n_V = n_{ND} + n_p$$

$$\frac{\bar{n}_p}{t_V} + \frac{\bar{n}_p}{k \cdot t_p} = \frac{n_{NV}^2}{k_\alpha^2}$$

$$n_{ND} = n_{NV} + k_\beta \sqrt{\frac{n_{ND}}{t_V} + \frac{n_{NV}^2}{k_\alpha^2}}$$

řešíme pro n_{ND}

$$n_{ND} = n_{NV} + \frac{k_\beta^2}{2 \cdot t_V} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \underbrace{\frac{4n_{NV}t_V}{k_\beta^2}}_{Z1} + \underbrace{\frac{4n_{NV}^2t_V^2}{k_\alpha^2 \cdot k_\beta^2}}_{Z2}} \right]$$

$$k_\alpha = k_\beta = k$$

$$Z2 \gg Z1 \gg 1$$

$$n_{ND} = 2n_{NV} + \frac{k^2}{2t_V}$$

Meze 4

$$L_Q = n_Q \quad \sigma_Q^2 = \sigma_V^2 + \sigma_p^2 \quad \sigma_Q^2 = \frac{n_Q + \bar{n}_p}{t_V} + \frac{\bar{n}_p}{k \cdot t_p} \quad n_Q = k_Q \sqrt{\frac{n_Q}{t_V} + \frac{n_{NV}^2}{k_\alpha^2}}$$

$$L_Q = \frac{k_Q^2}{2t_V} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4n_{NV}^2 \cdot t_V^2}{k_\alpha^2 \cdot k_Q^2}} \right]$$

k	n_{NV}	n_{ND}	n_Q
1	$2,33 \sqrt{\frac{n_p}{t}}$	$\frac{2,71}{t} + 2n_{NV}$	$\frac{50}{t} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{n_p \cdot t}{12,5}} \right]$
$\rightarrow \infty$	$1,64 \sqrt{\frac{\bar{n}_p}{t}}$	$\frac{2,71}{t} + 2n_{NV}$	$\frac{50}{t} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{n}_p \cdot t}{25}} \right]$
$n_p = 0$	0	$\frac{2,71}{t}$	$\frac{100}{t}$

$$k_\alpha = k_\beta = k \quad ; \quad \alpha = \beta = 0,05 \quad ; \quad t_V = t_p = t \quad ; \quad k_Q = 10$$

Meze 5

Spektrometrie záření

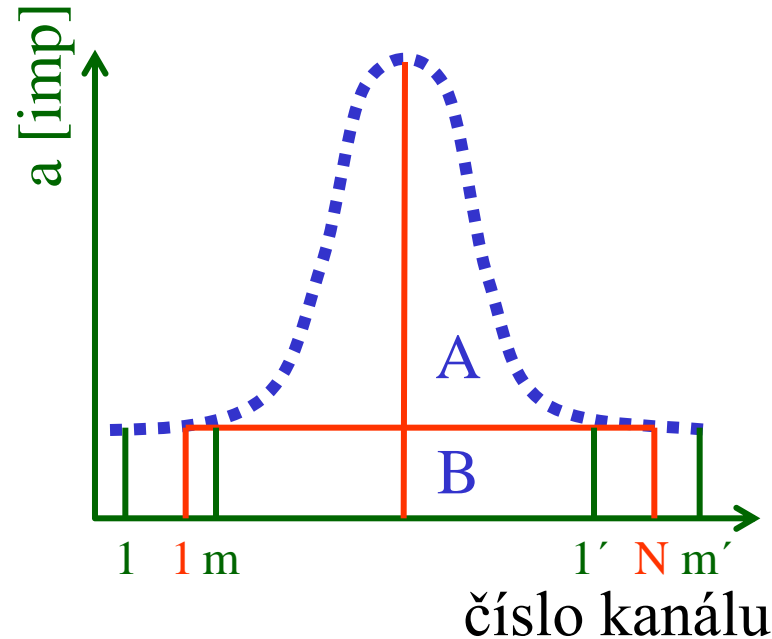
$$A = T - B = \sum_{i=1}^N a_i - \frac{N}{2}(a_1 + a_N)$$

$$\sigma_A^2 = T + \frac{N^2}{4}(a_1 + a_N)$$

$$A_{NV} = \frac{k}{2} \sqrt{\left(2 + \frac{N-2}{m}\right) (N-2)(\bar{a}_1 + \bar{a}_N)}$$

$$A_{ND} = k^2 + k \sqrt{\left(2 + \frac{N-2}{m}\right) (N-2)(\bar{a}_1 + \bar{a}_N)}$$

$$A_Q = \frac{k_Q^2}{2} + \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{\left(2 + \frac{N-2}{m}\right) (N-2)(\bar{a}_1 + \bar{a}_N)}{k_Q^2}} \right\}$$



$$\bar{a}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i$$

$$\bar{a}_N = \frac{1}{m'} \sum_{i=1'}^{m'} a_i$$